ESPAÇOS MÉTRICOS

14 de Fevereiro de 2017

Prova 2

Nome: ______________________________

1. Mostre que a composta de funções contínuas é uma função contínua.

2. Considere $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ munido da métrica usual induzida por $\mathbb{R}$ e (M,d) um espaço métrico. Mostre que um sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é convergente para um ponto $a \in M$ se, e somente se, a função $f : C \to M$, definida por $f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$ e $f(0) = a$, é contínua.

3. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Dada uma função $f : M \to N$, mostre que são equivalentes:

(a) f é contínua;

(b) $f^{-1}[F]$ é fechado, para todo subconjunto fechado $F \subseteq N$;

(c) $f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$, para todo $A \subseteq M$.

4. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Seja $f : M \to N$ uma isometria, isto é, f é uma função sobrejetora tal que $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x,y)$, para quaisquer x, $y \in M$. Mostre que:

(a) f é injetora;

(b) f^{-1} também é uma isometria;

(c) f é contínua.

5. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos, $A \subseteq M$ e $f : M \to N$. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $f : M \to N$ é contínua em todo ponto de A, então $f|_A : A \to N$ é uma função contínua.

(b) Se $f|_A : A \to N$ é uma função contínua, então $f : M \to N$ é contínua em todo ponto de A.

6. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos, $a \in M$ e $f : M \to N$. Mostre que f é contínua em a se, e somente se, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para a implique em $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $f(a)$.

7. Sejam (M,d_M) um espaço métrico, $\phi : M \to M$ contínuua e uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_0 \in M$ qualquer e $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Mostre que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in M$, então a é um ponto fixo de ϕ.

8. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Mostre que $\overline{X} = M \setminus \operatorname{int}(M \setminus X)$ e $\operatorname{int}(X) = M \setminus (\overline{M \setminus X})$.

9. Dê exemplo de um espaço com duas métricas não-discretas e não equivalentes. Dê outro exemplo de um espaço com duas métricas não-discretas e equivalentes.

10. Mostre que, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo limitado, (M,d_M) é um espaço métrico e $f : I \to M$ é uma função uniformemente contínua, então f é limitada.

11. Mostre que funções contínuas preservam conexidade e compacidade.

Boa prova!