



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

① Mostre que, se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais não crescente e limitada inferiormente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Como $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ é limitada inferiormente, o conjunto não vazio $A = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferiormente e, portanto, existe $\alpha = \inf A$.

Para mostrarmos que $X_n \rightarrow \alpha$, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $|X_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Como $\alpha = \inf A$, dado $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ tq. $\alpha \leq a < \alpha + \varepsilon$, uma vez que $\alpha + \varepsilon$ não é minorante de A . Como $a \in A = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $a = X_{n_0}$ e, se $n \geq n_0$, temos $X_n \leq X_{n_0}$ (pois a sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é não crescente) e $\alpha \leq X_n$ (pois $\alpha = \inf \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$).

Logo, se $n \geq n_0$, temos $|X_n - \alpha| = X_n - \alpha \leq X_{n_0} - \alpha < \alpha + \varepsilon - \alpha = \varepsilon$

$$\downarrow$$
$$X_n \geq \alpha$$

$$\downarrow$$
$$X_n \leq X_{n_0}$$

$$\downarrow$$
$$X_{n_0} < \alpha + \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha = \inf \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$

② Mostre que as seguintes funções não são métricas e diga se elas são ou não pseudométricas.

(a) $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$;

(b) $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = (x - y)^2$.

(a) d não é métrica, pois $d((0, 1), (0, 2)) = |0 - 0| = 0$ apesar de $(0, 1) \neq (0, 2)$.

d é pseudométrica, pois satisfaz:

$$d1) \quad d((x, y), (x, y)) = |x - x| = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$d3) \quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| = d((x_2, y_2), (x_1, y_1)), \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$d4) \quad d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| = d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)), \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$$

(b) d não é nem pseudométrica, pois não satisfaz $d4$: $d(2, 0) = (2 - 0)^2 = 4 > 2 = 1 + 1 = (2 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = d(2, 1) + d(1, 0)$

Obz.: $d(z, x) > d(z, y) + d(y, x), \forall x < y < z$ em $\mathbb{R}$



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

③ Sejam X um conjunto qualquer, (M, d_M) um espaço métrico e $\mathcal{B}(X, M)$ o conjunto das funções limitadas de X em M . Mostre que, dadas $f, g \in \mathcal{B}(X, M)$, o conjunto $\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$ é limitado e, portanto, $d: \mathcal{B}(X, M) \times \mathcal{B}(X, M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(f, g) = \sup \{ \}$ está bem definida. Mostre que $(\mathcal{B}(X, M), d)$ é um espaço métrico.

Como $f, g \in \mathcal{B}(X, M)$, temos que $f(X) \subseteq M$ e $g(X) \subseteq M$ são conjuntos limitados de M , donde $f(X) \cup g(X)$ é um conjunto limitado de M , isto é, existe o $\sup$ do conjunto $\{d_M(a, b); a \in f(X), b \in g(X)\}$ que é limitado em $\mathbb{R}$. Como $\{d_M(f(x), g(x)); x \in X\} \subseteq \{d_M(a, b); a \in f(X), b \in g(X)\}$, concluímos que o primeiro conjunto é limitado em $\mathbb{R}$, já que está contido em outro conjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Portanto, está bem definida $d(f, g) := \sup \{d_M(f(x), g(x)); x \in X\}$.

Vamos verificar que d é uma métrica em $\mathcal{B}(X, M)$:

d1) $d(f, f) = \sup \{d_M(f(x), f(x)); x \in X\} = \sup \{0; x \in X\} = 0, \forall f \in \mathcal{B}(X, M)$

d2) $f \neq g \Rightarrow \exists a \in X$ tq. $f(a) \neq g(a)$, donde $d_M(f(a), g(a)) > 0$.

Logo, $d(f, g) = \sup \{d_M(f(x), g(x)); x \in X\} \geq d_M(f(a), g(a)) > 0$.

$\therefore d(f, g) > 0$ sempre que $f \neq g$

d3) $d(f, g) = \sup \{d_M(f(x), g(x)); x \in X\} = \sup \{d_M(g(x), f(x)); x \in X\} = d(g, f)$

d4) $f, g, h \in \mathcal{B}(X, M) \Rightarrow d(f, h) = \sup \{d_M(f(x), h(x)); x \in X\} \leq$

$$\leq \sup \{d_M(f(x), g(x)) + d_M(g(x), h(x)); x \in X\} \Rightarrow \sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \\ = \sup \{d_M(f(x), g(x)); x \in X\} + \sup \{d_M(g(x), h(x)); x \in X\} = d(f, g) + d(g, h)$$

Logo, d é uma métrica em $\mathcal{B}(X, M)$ e, portanto, $(\mathcal{B}(X, M), d)$ é um espaço métrico.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

④ Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial real normado. Prove que (V, d) é um espaço métrico com $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(u, v) = \|u - v\|$.

Vamos mostrar que d é uma métrica em V :

d1) $d(v, v) = \|v - v\| = \|0_V\| = 0, \forall v \in V$

d2) $u \neq v \Rightarrow (u - v) \neq 0_V \Rightarrow d(u, v) = \|u - v\| \neq 0$ (N1)

d3) $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1) \cdot (v - u)\| = |-1| \cdot \|v - u\| = 1 \cdot \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u)$ (N2)

d4) $d(u, v) = \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v), \forall u, v, w \in V$. (N3)

Logo (V, d) é um espaço métrico.

⑤ Mostre que, se (M, d_M) é um espaço pseudométrico, então a relação $\sim$ em M dada por $x \sim y$ se $d_M(x, y) = 0$ é uma relação de equivalência em M . Defina uma distância d no conjunto quociente $M/\sim$ que faça de $(M/\sim, d)$ um espaço métrico.

Para mostrarmos que $\sim$ é relação de equivalência em M , precisamos que $\sim$ seja:

(i) (Reflexiva) $\forall x \in M$, temos que $d_M(x, x) = 0$, logo $x \sim x$.

(ii) (Simétrica) $x \sim y \Rightarrow d_M(x, y) = 0 \Rightarrow d_M(y, x) = 0 \Rightarrow y \sim x$.

(iii) (Transitiva) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow d_M(x, y) = 0$ e $d_M(y, z) = 0 \Rightarrow$ desigualdade triangular em M

$\Rightarrow d_M(x, z) \leq d_M(x, y) + d_M(y, z) = 0 + 0$. Como $d_M(x, z) \geq 0$ em um espaço pseudométrico, segue que $d_M(x, z) = 0$. Logo $x \sim z$.

Seja $M/\sim$ o conjunto quociente de M pela relação de equivalência $\sim$, isto é, $M/\sim = \{[x]; x \in M\}$, onde $[x] = \{y \in M; y \sim x\}$.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

Seja $d: M/\sim \times M/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d([X], [Y]) = d_M(X, Y)$.

Note que d está bem definida, pois não depende dos representantes escolhidos em $[X]$ e em $[Y]$, uma vez que $d([X_1], [Y_1]) = d([X_2], [Y_2])$ se $X_1 \sim X_2$ e $Y_1 \sim Y_2$, já que: $X_1 \sim X_2$ e $Y_1 \sim Y_2 \Rightarrow d_M(X_1, X_2) = 0$ e $d_M(Y_1, Y_2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d([X_1], [Y_1]) = d_M(X_1, Y_1) \leq d_M(X_1, X_2) + d_M(X_2, Y_2) + d_M(Y_2, Y_1) =$
 $= d_M(X_2, Y_2) = d([X_2], [Y_2]) \leq d_M(X_2, X_1) + d_M(X_1, Y_1) + d_M(Y_1, Y_2) =$
 $= d_M(X_1, Y_1) = d([X_1], [Y_1])$, isto é, $d([X_2], [Y_2]) = d([X_1], [Y_1])$.

Segue que d é uma métrica em $M/\sim$, pois:

d1) $d([X], [X]) = d_M(X, X) = 0, \forall [X] \in M/\sim$

d2) $[X] \neq [Y] \Rightarrow [X] \cap [Y] = \emptyset \Rightarrow X \not\sim Y \Rightarrow d_M(X, Y) \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d([X], [Y]) = d_M(X, Y) \neq 0$

d3) $d([X], [Y]) = d_M(X, Y) = d_M(Y, X) = d([Y], [X]), \forall [X], [Y] \in M/\sim$

d4) $d([X], [Y]) = d_M(X, Y) \leq d_M(X, Z) + d_M(Z, Y) = d([X], [Z]) +$
 $+ d([Z], [Y]), \forall [X], [Y], [Z] \in M/\sim$

Portanto, $(M/\sim, d)$ é um espaço métrico.

Obs: O enunciado dá margem para que se defina uma métrica em $M/\sim$ que não "convém" com d_M .

6) Mostre que todo subconjunto finito de um espaço métrico é discreto.

Seja (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$ finito. Se $X = \emptyset$, todo ponto de $\emptyset$ é isolado, logo $X = \emptyset$ será discreto. Se $X \neq \emptyset, \exists n \in \mathbb{N}$ tq.

$X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ com $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$ em $\{1, \dots, n\}$. Para vermos que X é discreto, precisamos mostrar que a_i é isolado de $X, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Seja $\varepsilon_i = \min_{j \neq i} \{d(a_i, a_j)\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Como (M, d) é espaço

métrico, temos que $\varepsilon_i > 0$ e $B(a_i; \varepsilon_i) \cap X = \{a_i\}$, pois $d(x, a_i) \geq \varepsilon_i, \forall x \in X$ com $x \neq a_i$. Logo a_i é ponto isolado de X e, portanto, X é discreto.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

7) Sejam (M, d) um espaço métrico e duas seqüências $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M convergentes para $X \in M$ e $Y \in M$, respectivamente. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, Y_n) = d(X, Y)$.

Sejam $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dada por $\alpha_n = d(X_n, Y_n)$ e $\alpha = d(X, Y) \in \mathbb{R}$. Para mostrarmos que $\alpha_n \rightarrow \alpha$, note que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\alpha_n = d(X_n, Y_n) \leq d(X_n, X) + d(X, Y) + d(Y, Y_n) = \alpha + \gamma_n$ e $\alpha = d(X, Y) \leq d(X, X_n) + d(X_n, Y_n) + d(Y_n, Y) = \alpha_n + \gamma_n$, considerando $\gamma_n = d(X_n, X) + d(Y_n, Y)$. Logo, $\alpha_n \leq \alpha + \gamma_n$ e $\alpha \leq \alpha_n + \gamma_n$, donde $\alpha - \gamma_n \leq \alpha_n \leq \alpha + \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $X_n \rightarrow X$ e $Y_n \rightarrow Y$, temos $d(X_n, X) \rightarrow 0$ e $d(Y_n, Y) \rightarrow 0$ e, portanto, $\gamma_n \rightarrow 0$. Logo, $(\alpha - \gamma_n) \rightarrow \alpha$ e $(\alpha + \gamma_n) \rightarrow \alpha$ e, portanto, $\alpha_n \rightarrow \alpha$.
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} d(X_n, Y_n) = d(X, Y)$

8) Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que o conjunto $\mathcal{T}_d = \{A \subseteq M; A = \text{int}(A)\}$ é uma topologia em M . Mostre que, dado $F \subseteq M$, tem-se que $F = \overline{F}$ se, e somente se, $M \setminus F \in \mathcal{T}_d$.

Para verificarmos que $\mathcal{T}_d$ é uma topologia, precisamos provar que:
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ e $M \in \mathcal{T}_d$; (ii) $\{A_i; i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_d \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_d$; $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{T}_d \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_d$ (iii)
vazio e M são abertos; união qualquer de abertos é aberto; interseção finita de abertos é aberto.

(i) $\text{int}(\emptyset) = \{a \in M; \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_\varepsilon(a) \subseteq \emptyset\} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_d$

$\text{int}(M) = \{a \in M; \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_\varepsilon(a) \subseteq M\} = M \Rightarrow M \in \mathcal{T}_d$

(ii) $\{A_i; i \in I\} \subseteq \mathcal{T}_d$, isto é, $A_i \in \mathcal{T}_d, \forall i \in I \Rightarrow \text{int}(A_i) = A_i, \forall i \in I$, i.e.,

$\forall i \in I, \forall a \in A_i, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_\varepsilon(a) \subseteq A_i \Rightarrow$ Dado $a \in \bigcup_{i \in I} A_i, \exists i_0 \in I \text{ t.q. } a \in A_{i_0}$ e como $\text{int}(A_{i_0}) = A_{i_0}, \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } B_\varepsilon(a) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Portanto, $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \text{int}(\bigcup_{i \in I} A_i)$ e como a outra inclusão é sempre verdadeira, segue que $\bigcup_{i \in I} A_i = \text{int}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i$, i.e., $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_d$.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

(iii) $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \text{int}(A_j) = A_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$
ie, $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall a \in A_j, \exists \varepsilon > 0$ tq. $B_\varepsilon(a) \subseteq A_j \Rightarrow$ Dado $a \in \bigcap_{j=1}^n A_j$, temos

que $a \in A_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$, logo $\exists \varepsilon_j > 0$ tq. $B_{\varepsilon_j}(a) \subseteq A_j$. Tomando

$\varepsilon = \min \{\varepsilon_j; j \in \{1, \dots, n\}\}$, segue que $B_\varepsilon(a) \subseteq B_{\varepsilon_j}(a) \subseteq A_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$

e, portanto, $B_\varepsilon(a) \subseteq \bigcap_{j=1}^n A_j$. Portanto, $\bigcap_{j=1}^n A_j \subseteq \text{int}(\bigcap_{j=1}^n A_j)$ e como a outra inclusão

é sempre verdadeira, segue que $\text{int}(\bigcap_{j=1}^n A_j) = \bigcap_{j=1}^n A_j$, ie, $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Logo $\mathcal{A}$ é uma topologia em M e $(M, \mathcal{A})$ é um espaço topológico.

Dado $F \subseteq M$, vamos mostrar que $\bar{F} = F \Leftrightarrow M/F \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \text{int}(M \setminus F) = M \setminus F$
Considerando $\bar{F} = \{a \in M; \forall \varepsilon > 0, \exists x \in F \text{ com } d(x, a) < \varepsilon\}$, é sempre válido
que $F \subseteq \bar{F}$.

($\Rightarrow$) Vamos mostrar que $M \setminus F \subseteq \text{int}(M \setminus F)$, ie, dado $a \in M \setminus F$ devemos
encontrar $\varepsilon > 0$ tq. $B_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus F$. seja $a \in M \setminus F$. Como $F = \bar{F}$, temos
que $a \notin \bar{F}$, logo $\exists \varepsilon > 0$ tq. $\nexists x \in F \cap B_\varepsilon(a)$, ie, $F \cap B_\varepsilon(a) = \emptyset$ e, portanto,
 $B_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus F$. Tomando $\varepsilon = \varepsilon$, segue que $a \in \text{int}(M \setminus F)$.
 $\therefore \text{int}(M \setminus F) = M \setminus F$, ie, $M \setminus F \in \mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Vamos mostrar que $\bar{F} \subseteq F$: seja $a \in \bar{F}$. Suponha, por absurdo, que $a \notin F$.
Então $a \in M \setminus F$. Como $\text{int}(M \setminus F) = M \setminus F$, temos que $\exists \varepsilon > 0$ tq. $B_\varepsilon(a) \subseteq M \setminus F$,
logo $B_\varepsilon(a) \cap F = \emptyset$ e, portanto, $a \notin \bar{F}$. Absurdo! Logo, $a \in F$.
 $\therefore \bar{F} = F$



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

(9) Prove que toda bola aberta de um espaço métrico é um aberto nesse espaço.

Sejam (M, d) um espaço métrico e B uma bola aberta de M . Então $\exists a \in M$ e $\exists r > 0$ tq. $B = B_r(a) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$.

Vamos mostrar que B é aberto, ie, $B \subseteq \text{int}(B)$ (ou $B \in \mathcal{Z}_d$), ou seja, $\forall x \in B, \exists \varepsilon > 0$ tq. $B(x, \varepsilon) \subseteq B = B_r(a) = B_r(a)$.

Seja $x \in B = B_r(a)$. Note que $d(x, a) < r$. Considere $\varepsilon = r - d(x, a)$. Claro que $\varepsilon > 0$ e, dado $y \in B_\varepsilon(x)$ temos que $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) <$

$< \varepsilon + d(x, a) = r - d(x, a) + d(x, a) = r$, donde $y \in B_r(a)$. Logo, $x \in \text{int}(B)$.

$\therefore B \subseteq \text{int}(B)$ e, portanto, B é aberto ($B \in \mathcal{Z}_d$).

(10) Sejam $(\mathbb{C}, d)$ o corpo dos números complexos munido da métrica euclidiana e $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Calcule $\text{diam}(D)$ e $d(4i, D)$.

Afirmamos que $\text{diam}(D) = \sup \{d(z_1, z_2); z_1 \in D, z_2 \in D\} = 2$. Com efeito, 2 é limitante superior de $\{d(z_1, z_2); z_1 \in D, z_2 \in D\}$, pois $z_1 \in D, z_2 \in D$ implicam em $d(z_1, z_2) \leq d(z_1, 0) + d(0, z_2) = |z_1| + |z_2| < 1 + 1 = 2$; e 2 é o menor limitante superior de $\{d(z_1, z_2); z_1 \in D, z_2 \in D\}$, pois se $\alpha < 2$ temos que α não é limitante superior de $\{d(z_1, z_2); z_1 \in D, z_2 \in D\}$, já que tomando $z_1 = 1 - \frac{(2-\alpha)}{4}$ e $z_2 = -1 + \frac{(2-\alpha)}{4} = -z_1$, obtemos

$$z_1 \in D, z_2 \in D \text{ e } d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \left| \frac{\alpha+2}{2} \right| = \frac{\alpha+2}{2} > \frac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha.$$

Logo $\text{diam}(D) = 2$.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

Afirmamos que $d(4i, D) = \inf \{d(4i, z); z \in D\} = 3$. Com efeito,
(i) 3 é limitante inferior de $\{d(4i, z); z \in D\}$, pois $z \in D$ implica em
 $4 = d(0, 4i) \leq d(0, z) + d(z, 4i) < 1 + d(4i, z)$. Logo $3 = 4 - 1 < d(4i, z), \forall z \in D$
(ii) 3 é o maior limitante inferior de $\{d(4i, z); z \in D\}$, pois se $\beta > 3$,
temos que β não é limitante inferior de $\{d(4i, z); z \in D\}$, já que tomando
 $z_0 = \frac{(5-\beta)}{2} \cdot i$, obtemos $z_0 \in D$ (se $\beta < 5$) e $d(4i, z_0) = |4i - z_0| = |4i - (\frac{5-\beta}{2})i| =$
 $= |\frac{3+\beta}{2} \cdot i| = |\frac{3+\beta}{2}| \cdot |i| = \frac{(3+\beta)}{2} \cdot 1 = \frac{3+\beta}{2} < \frac{\beta+\beta}{2} = \beta$

Logo, $d(4i, D) = 3$.

(11) Prove ou dê contraexemplo: Se (M, d) é um espaço métrico e F, G são fechados de M com $d(F, G) = 0$, então $F \cap G \neq \emptyset$.

Não é verdadeiro. Tome $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual e considere
os conjuntos $F = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ e $G = \{2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}, \dots\} =$
 $= \{n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq 2\} \subseteq \mathbb{R}$. Então F e G são fechados de $\mathbb{R}$ com
 $F \cap G = \emptyset$ e $d(F, G) = \inf \{d(x, y); x \in F, y \in G\} \leq d(\underset{n \in F}{n}, \underset{n \in G}{n + \frac{1}{n}}), \forall n \geq 2$,
ie, $d(F, G) \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$ e, portanto, $d(F, G) = 0$

(12) Mostre que $\{r \cdot \pi; r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Lema: $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Usando o Lema, tome $\alpha < \beta$ em $\mathbb{R}$ e vamos mostrar que $\{r \cdot \pi; r \in \mathbb{Q}\} \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset$.
Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, temos que $\mathbb{Q} \cap]\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}[\neq \emptyset$, ie, $\exists r_0 \in \mathbb{Q}$ tq.
 $\frac{\alpha}{\pi} < r_0 < \frac{\beta}{\pi}$. Logo, $\alpha < r_0 \cdot \pi < \beta$, donde $r_0 \cdot \pi \in \{r \cdot \pi; r \in \mathbb{Q}\} \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset$.
 $\therefore \{r \cdot \pi; r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.