ESPAÇOS MÉTRICOS

12 de Fevereiro de 2017

Lista extra

1. Sejam A, B subconjuntos conexos de um espaço conexo X. Se $\partial A \subseteq B$ então $A \cup B$ é conexo.

2. Dê um exemplo de dois conexos A e B tais que $A \cap B$ não seja conexo.

3. Dizemos que um espaço X é **totalmente desconexo** se os únicos conexos não-vazios de X são os conjuntos unitários. Mostre que:

(a) todo espaço com a métrica discreta é totalmente desconexo;

(b) $\mathbb{Q}$ é um subespaço totalmente desconexo de $\mathbb{R}$.

4. Se A é conexo, então $\overline{A}$ é conexo. Mostre que não vale a recíproca.

5. Seja $\mathscr{C}$ uma família de conexos de um espaço X. Mostre que se existe $A \in \mathscr{C}$ tal que $A \cap C \neq \emptyset$, para todo $C \in \mathscr{C}$, então $\bigcup \mathscr{C}$ é conexo.

Sugestão: Considere a família $\mathscr{D} = \{C \cup A : C \in \mathscr{C}\}$.

6. Seja V um espaço vetorial normado munido da métrica induzida pela norma. Dizemos que $A \subseteq V$ é **convexo** se, para todo $a, b \in A$, $\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0,1]\} \subseteq A$. Mostre que todo conjunto convexo é conexo por caminhos. Mostre que não vale a recíproca.

7. Considere $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana. Mostre que $B_r(x)$ é conexo, para quaisquer $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) O interior de um conjunto conexo é conexo.

(b) A fronteira de um conjunto conexo é conexo.

(c) Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se X tem m componentes conexas e Y tem n, então $m \geq n$.

(d) Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, então cada componente conexa de A é aberta.

(e) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(\text{conexo}) = \text{conexo}$, então f é contínua.

(f) Se X é um espaço métrico e $a, b \in X$ pertencem a componentes conexas distintas, então existe uma cisão $X = A \cup B$, com $a \in A$ e $b \in B$. [*Sugestão:* Considere $X = Y \cup \{a, b\}$, onde $a = (0,0)$, $b = (0,1)$ e $X = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}\}$.]

9. Mostre que $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a subespaço algum de $\mathbb{R}$.

10. Considere as letras maiúsculas A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z, desprovidas de extremidades. Agrupe-as em classes de figuras homeomorfas.

11. Mostre que o único denso de um espaço discreto X é o próprio X.

12. Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subseteq X$. Mostre que Y é denso em X se, e somente se, $A \cap Y \neq \emptyset$ para todo aberto não-vazio $A \subseteq X$.

13. Mostre que todo subespaço de um espaço separável é separável. Conclua que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é separável.

14. Mostre que todo espaço compacto é separável.

15. Mostre que se X é compacto, então X é de Baire.

16. Mostre que homeomorfismos preservam a propriedade de Baire.

17. Seja (X,d) um espaço métrico tal que toda cobertura aberta admite subcobertura enumerável. Mostre que todo subespaço de X tem tal propriedade.

18. Dizemos que $Y \subseteq X$ é um conjunto **raro** se, para todo $x \in \overline{Y}$, não existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq \overline{Y}$. Dizemos que $Z \subseteq X$ é um conjunto **magro** se existe uma família $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos raros em X tal que $Z = \bigcup\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alternativamente, diz-se que um conjunto magro é um conjunto de **primeira categoria** e todo conjunto não-magro é dito de **segunda categoria**.

(a) Mostre que $Y \subseteq X$ é raro em X se, e somente se, $X \setminus \overline{Y}$ é denso em X.

(b) *(Teorema de Baire)* Mostre que todo espaço de Baire é de segunda categoria.

19. Dê um exemplo de um espaço enumerável de segunda categoria. Como são os conjuntos raros neste exemplo?

20. Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$. Mostre que existe um métrica completa d' sobre X que é equivalente a d e, para todos x, $y \in X$, $d'(x,y) \leq c$.

21. Seja $\{(X_n,d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de espaços métricos tal que cada métrica d_n é limitada por $\frac{1}{2^n}$. Mostre que a função $d\colon \prod_n X_n \times \prod_n X_n \to \mathbb{R}$ dada por $d((a_n),(b_n)) = \sum_n d_n(a_n,b_n)$, para todos (a_n), $(b_n) \in \prod_n X_n$, é uma métrica sobre $\prod_n X_n$. Mostre que se cada espaço (X_n,d_n) é completo, então o espaço $(\prod_n X_n, d)$ é completo.