ESPAÇOS MÉTRICOS

12 de Fevereiro de 2017

Lista 4

1. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Se A, $B \subseteq M$ são tais que $d(A,B)=0$ e $f : M \to N$ é uniformemente contínua, então $d(f[A],f[B])=0$.

2. Seja (M,d) um espaço métrico e sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:

(a) (x_n) é de Cauchy se, e somente se, (y_n) é de Cauchy.

(b) Dado $x \in M$, $\lim x_n = x$ se, e somente se, $\lim y_n = x$.

3. Prove que se $f : M \to N$ é uniformemente contínua, então f transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Mostre que a hipótese de que f é uniformemente contínua não pode ser enfraquecida para "f é contínua".

4. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Mostre que se x é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, então x_n converge para x.

5. Mostre que qualquer conjunto não-vazio com a métrica discreta é completo.

6. Mostre que os espaços $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não são completos com as métricas usuais.

7. Mostre que se X e Y são subespaços completos de um espaço métrico M, então $X \cap Y$ é completo.

8. Seja $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ e considere sobre S a métrica d induzida pela usual de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que (S,d) não é completo.

(b) Encontre uma métrica d' sobre S que seja equivalente a d mas tal que $\left(S,d'\right)$ seja completo.

9. Encontre dois espaços métricos não-homeomorfos cujos completamentos são homeomorfos.

10. Mostre que um espaço métrico discreto M é compacto se, e somente se, M é finito.

11. Sejam M um espaço métrico e A, $B \subseteq M$ compactos. Mostre que $A \cup B$ é compacto.

12. Seja $\mathscr{K}$ uma família de compactos em um espaço métrico (X,d). Mostre que $\bigcap \mathscr{K}$ é compacto.

13. Dê um exemplo de um conjunto limitado que não seja compacto.

14. Sejam K um espaço compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, mostre que existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$. Mostre que a hipótese de que K é compacto é necessária.

15. Dizemos que $f : M \to N$ é uma **função fechada** se, para todo $F \subseteq M$ fechado, temos que $f[F]$ é fechado em N. Analogamente, dizemos que $f : M \to N$ é uma **função aberta** se $f[A]$ é aberto para todo $A \subseteq M$ aberto.

(a) Mostre que se M é compacto e $f : M \to N$ é contínua, então f é fechada. Mostre que a hipótese de que M é compacto é necessária.

(b) Mostre que se $f : M \to N$ é fechada e bijetora, então f é aberta.

(c) Conclua que se M é compacto e $f : M \to N$ é contínua e bijetora, então f é um homeomorfismo.

16. Seja (K,d_K) um espaço métrico compacto. Considere o conjunto $\mathscr{C}(K)$ de todas as funções contínuas de K em $\mathbb{R}$, considerando $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. Mostre que a função $d : \mathscr{C}(K) \times \mathscr{C}(K) \to \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K\}$, para f, $g \in \mathscr{C}(K)$, é uma métrica sobre $\mathscr{C}(K)$. Mostre que $(\mathscr{C}(K),d)$ não é limitado.

17. Mostre que se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então X é localmente compacto se, e somente se, Y é localmente compacto.