ESPAÇOS MÉTRICOS

03 de Fevereiro de 2016

Lista 3 - Continuidade

1. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Mostre que uma função $f: M \to N$ é contínua num ponto $a \in M$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\left[B^M_\delta(a)\right] \subseteq B^N_\epsilon(f(a))$.

2. Considere $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ munido da métrica usual induzida por $\mathbb{R}$ e (M,d) um espaço métrico. Mostre que um sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é convergente para um ponto $a \in M$ se, e somente se, a função $f: C \to M$, definida por $f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$ e $f(0) = a$, é contínua.

3. Sejam M e N espaços métricos. Dada uma função $f: M \to N$, mostre que são equivalentes:

(a) f é contínua;

(b) $f^{-1}[F]$ é fechado, para todo subconjunto fechado $F \subseteq N$;

(c) $f\left[\overline{A}\right] \subseteq \overline{f[A]}$, para todo $A \subseteq M$.

4. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Seja $f: M \to N$ uma isometria, isto é, f é uma função sobrejetora tal que $d_N(f(x),f(y)) = d_M(x,y)$, para quaisquer x, $y \in M$. Mostre que:

(a) f é injetora;

(b) f^{-1} também é uma isometria;

(c) f é contínua.

5. Sejam (M,d_M), (N,d_N) espaços métricos. Dizemos que $f: M \to N$ é uma função **uniformemente contínua** se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados a, $b \in M$, se $d_M(a,b) < \delta$ então $d_N(f(a),f(b)) < \epsilon$. Mostre que:

(a) toda função uniformemente contínua é contínua.

(b) a composição de funções uniformemente contínuas também é uniformemente contínua.

6. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos, $A \subseteq M$ e $f: M \to N$. Prove ou dê um contra-exemplo.

(a) Se $f: M \to N$ é contínua em todo ponto de A, então $f|_A: A \to N$ é uma função contínua.

(b) Se $f|_A: A \to N$ é uma função contínua, então $f: M \to N$ é contínua em todo ponto de A.

7. Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos e f, $g: M \to N$ funções contínuas. Se $f(a) \neq g(a)$, para algum $a \in M$, mostre que existe uma bola $B = B_\epsilon(a)$ tal que $f(x) \neq g(y)$, para quaisquer x, $y \in B$.

8. Considere (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos e $f: M \to N$ uma função contínua. Mostre que o gráfico de f — ou seja, o conjunto $\{(x,f(x)) : x \in M\}$ — é fechado em $M \times N$ com a métrica $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_M(x_1,x_2), d_N(y_1,y_2)\}$.

9. Mostre que se d_1, d_2 e d_3 são métricas sobre um conjunto X tais que d_1 é equivalente a d_2 e d_2 é equivalente a d_3, então d_1 é equivalente a d_3.

10. Sejam X um conjunto não-vazio e d_1 e d_2 métricas sobre X. São equivalentes:

(a) d_1 e d_2 são equivalentes;

(b) (X,d_1) e (X,d_2) têm as mesmas sequências convergentes.

11. Mostre que todo espaço métrico (M,d) admite uma métrica d' que é equivalente a d e torna M limitado.

12. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, f é constante.

13. Seja $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ uma bijeção. Mostre que f não é contínua.