ESPAÇOS MÉTRICOS

24 de Janeiro de 2017

Lista 2 - Convergência e Topologia

1. Sejam (M,d) um espaço métrico e duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M, ambas convergindo para $a \in M$. Mostre que a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n-1} = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, também é uma sequência convergente para a.

2. Sejam (M,d) um espaço métrico e duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M convergentes para $x \in M$ e $y \in M$, respectivamente. Mostre que:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) = d(x,y)$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

3. Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que:

   (a) se $\{A_l\}_{l\in L}$ é uma família de abertos de M, então $\bigcup_{l\in L} A_l$ também é um aberto de M;

   (b) se $A_1,\dots,A_n$ são abertos de M, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ também é um aberto de M;

   (c) se $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de fechados de M, então $\bigcap_{i\in I} F_i$ também é um fechado de M;

   (d) se $F_1,\dots,F_n$ são fechados de M, então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ também é um fechado de M;

   (e) dado $F \subseteq M$, tem-se que $\overline{F} = F$ se, e somente se, $M \setminus F$ é um aberto de M.

4. Mostre por meio de contraexemplos que não valem as seguintes afirmações num espaço métrico qualquer:

   (a) união de uma família infinita de fechados é um fechado;

   (b) intersecção de uma família infinita de abertos é um aberto;

   (c) $B_r[x] \setminus B_r(x) = \partial B_r(x)$.

5. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Mostre que:

   (a) $\text{int}(X) = \bigcup\{A \subseteq M : A \text{ é aberto e } A \subseteq X\}$;

   (b) $\overline{X} = \bigcap\{F \subseteq M : F \text{ é fechado e } X \subseteq F\}$.

6. Sejam (M,d) um espaço métrico e X um subespaço de M. Mostre que

   $$\{A \subseteq X : A \text{ é aberto em } X\} = \{B \cap X : \text{B é aberto em } M\}$$

   e

   $$\{F \subseteq X : F \text{ é fechado em } X\} = \{G \cap X : G \text{ é fechado em } M\}.$$

7. Prove que toda bola aberta de um espaço métrico é um aberto nesse espaço. Use esse fato para mostrar que o interior de qualquer subconjunto de um espaço métrico é um aberto nesse espaço.

8. Dê um exemplo de um espaço métrico em que se tenha $\overline{B_r(x)} = B_r[x]$. Dê outro exemplo onde isso não ocorre.

9. Sejam (M,d) um espaço métrico e $A, B \subseteq M$. Prove ou dê um contra-exemplo.

   (a) Se $A \subseteq B$ então $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.

   (b) $\text{int}(A \cap B) \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

   (c) $\text{int}(A \cap B) \supseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

   (d) $\text{int}(A \cup B) \subseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$.

   (e) $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$.

10. Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico M. Mostre que:

(a) Se $A \subseteq B$, então $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que se tenha $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

11. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Mostre que $\overline{X} = M \setminus \text{int}(M \setminus X)$ e $\text{int}(X) = M \setminus (\overline{M \setminus X})$.

12. Sejam (X,d_X) e (Y,d_Y) espaços métricos, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Considerando o produto cartesiano $X \times Y$ um espaço métrico com a métrica do sup, mostre que:

(a) $\text{int}(A \times B) = \text{int}(A) \times \text{int}(B)$;

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

13. Seja V um espaço vetorial real normado. Mostre que todo subespaço vetorial próprio de V tem interior vazio.

14. Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que todo subconjunto finito de M é fechado.

15. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em um espaço métrico (M,d) convergindo para um ponto $a \in M$, mostre que $A = \{a\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço fechado de X.

16. Mostre que um subconjunto A de um espaço métrico é fechado se, e somente se, toda sequência convergente de pontos de A converge para um ponto de A.

17. Seja (M,d) um espaço métrico. Dado $X \subset M$, definimos $X_* = \{a \in M | d(a,X) = 0\}$. Mostre que $X_* = \overline{X}, \forall X \subset M$.

18. Prove ou dê contraexemplo:
Se (M,d) é um espaço métrico e F,G são fechados de M com $d(F,G) = 0$, então $F \cap G \neq \emptyset$.

19. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subseteq M$ com $\partial X \neq \emptyset$. Mostre que $d(X,(M \setminus X)) = 0$.

20. Mostre que a fronteira de um conjunto aberto tem interior vazio.

21. Mostre que existem um espaço métrico M e $X \subseteq M$ tal que $\text{int}(X) = \text{int}(M \setminus X) = \emptyset$. Mostre que, neste caso, as fronteiras de X e de $M \setminus X$ são o espaço todo.

22. Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $X \subset M$ é denso em M se $\overline{X} = M$. Mostre que:

(a) $\{r.x | r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}$ (com a métrica usual) para todo x irracional;

(b) $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$(com qualquer métrica produto) para todo $n \in \mathbb{N}$.

23. Sejam (M,d) um espaço métrico. Dados $a \in M$ e $X \subseteq M$, mostre que são equivalentes:

(a) a é ponto de acumulação de X;

(b) para qualquer $r > 0$, $B_r(x) \cap X$ é infinito.

24. Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Mostre que o conjunto dos pontos de acumulação de X é fechado.