ESPAÇOS MÉTRICOS

18 de Janeiro de 2017

Lista 1 - Espaços métricos e pseudométricos

1. Mostre que uma função $d\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ é uma métrica se, e somente se, d satisfaz, para a, b, $c\in X$:

(a) $d(a,b)=0$ se, e somente se, $a=b$;
(b) $d(a,c)\le d(a,b)+d(c,b)$.

2. Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que as seguintes funções também são métricas em M:

(a) $\gamma(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$;
(b) $\alpha(x,y)=\sqrt{d(x,y)}$;
(c) $\beta(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

3. Para cada uma das quatro condições que caracterizam uma métrica, obtenha uma função $d\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que não a cumpre mas satisfaz as outras três.

4. Mostre que as seguintes funções não são métricas e diga se elas são ou não pseudométricas :

(a) $f\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=|x_1-y_1|$, para $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) $g\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x,y)=(x-y)^2$.

5. Seja A um conjunto não-vazio e considere

$$X=\{f:A\to\{0,1\}\mid \text{o conjunto } \{a\in A: f(a)=1\} \text{ é finito}\}.$$

Defina agora a função $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ por $d(f,g)=\sharp\{a\in A: f(a)\neq g(a)\}$ para quaisquer f, $g\in X$. Prove que d é uma métrica sobre X.

[*Obs.:* Se F é um conjunto finito, $\sharp F$ é o número de elementos de F.]

6. Determine se é ou não uma métrica (e no caso negativo, se é ou não uma pseudométrica) a função $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ definida por $d(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\,dt$ para quaisquer f, $g\in X$, sendo:

(a) $X=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ é contínua}\}$;
(b) $X=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \text{ é integrável}\}$.

7. Sejam X um conjunto qualquer, (M,d_M) um espaço métrico e $\mathscr{B}(X,M)$ o conjunto das funções limitadas de X em M. Mostre que, dadas $f,g\in\mathscr{B}(X,M)$, o conjunto $\{d_M(f(x),g(x));x\in X\}$ é limitado e, portanto, $d\colon\mathscr{B}(X,M)\times\mathscr{B}(X,M)\to\mathbb{R}$ dada por $d(f,g)=\sup\{d_M(f(x),g(x));x\in X\}$ está bem definida. Mostre que $(\mathscr{B}(X,M),d)$ é um espaço métrico.

8. Sejam X um conjunto qualquer, $(V,||.||_V)$ um espaço vetorial real normado e $\mathscr{B}(X,V)$ o conjunto das funções limitadas de X em V. Mostre que $\mathscr{B}(X,V)$ é um espaço vetorial real e que $||.||\colon\mathscr{B}(X,V)\to\mathbb{R}$ dada por $||f||=\sup\{||f(x)||_V;x\in X\}$ é uma norma em $\mathscr{B}(X,V)$.

9. Mostre que, se (M,d_M) é um espaço pseudométrico, então a relação $\sim$ em M dada por $x\sim y$ se $d_M(x,y)=0$ é uma relação de equivalência em M. Defina uma distância d no conjunto quociente $M/\sim$ que faça de $M/\sim$ um espaço métrico.

10. Mostre que todo espaço métrico finito é discreto.

11. Seja X um conjunto infinito enumerável. Mostre que se pode definir uma métrica d em X de forma que nenhum ponto de X seja isolado nesse espaço métrico. Mais ainda, mostre que há exemplos que tornem X um espaço limitado ou ilimitado.

12. Sejam $n\in\mathbb{N}$, $(M_1,d_{M_1}),\cdots,(M_n,d_{M_n})$ espaços métricos e $M=M_1\times\cdots\times M_n$ com qualquer uma das métricas definidas para produtos cartesianos. Mostre que $x=(x_1,\cdots,x_n)$ é um ponto isolado de M se, e somente se, x_j é um ponto isolado de M_j, para todo $j\in\{1,\cdots,n\}$.