ESPAÇOS MÉTRICOS

12 de Janeiro de 2017

Lista 0 - Teoria dos conjuntos e análise real

1. Mostre que são equivalentes:

(a) $A \subseteq B$
(b) $A \cap B = A$
(c) $A \cup B = B$

2. Sejam X e Y conjuntos quaisquer e uma função $f : X \to Y$. Mostre que:

(a) $B \supseteq f(f^{-1}(B)), \forall B \subseteq Y$
(b) $A \subseteq f^{-1}(f(A)), \forall A \subseteq X$
(c) f é injetora $\iff f^{-1}(f(A)) = A, \forall A \subseteq X$
(d) $f(A_1)\backslash f(A_2) \subseteq f(A_1\backslash A_2), \forall A_1, A_2 \subseteq X$
(e) f é injetora $\iff f(A_1)\backslash f(A_2) = f(A_1\backslash A_2), \forall A_1, A_2 \subseteq X$

3. Sejam A e B conjuntos enumeráveis. Mostre que $A \cup B$ é um conjunto enumerável. Observação: lembre-se que conjuntos finitos também são enumeráveis.

4. Mostre que o conjunto $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto não-enumerável.

5. Mostre que $\sqrt{p}$ é irracional para todo número natural p primo.

6. Mostre que o conjunto $K_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

7. Sejam K e L corpos. Uma função $f : K \to L$ chama-se um homomorfismo de corpos quando satisfaz (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e (ii) $f(x.y) = f(x).f(y)$, para quaisquer x, y em K. Mostre que:

(a) Para qualquer homomorfismo de corpos temos que $f(0_K) = 0_L$.
(b) Prove que, se $f : K \to L$ é um homomorfismo de corpos, então ou $f(x) = 0_L$ para todo $x \in K$, ou então $f(1_K) = 1_L$ e f é injetora.

8. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$.

9. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $-A = \{-x; x \in A\}$.

(a) Mostre que, se A e B são limitados superiormente então $A+B$ também o é. Mostre que neste caso temos $sup(A + B) = supA + supB$.
(b) Mostre que, se A é limitado inferiormente, então $-A$ é limitado superiormente e que $sup(-A) = -inf(A)$.
(c) Mostre que se A e B são limitados inferiormente então $A+B$ também o é. Mostre que neste caso temos $inf(A + B) = inf A + inf B$.

10. Mostre que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais não decrescente e limitada superiormente, então $\lim_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

11. Mostre que:

(a) A união qualquer de subconjuntos abertos da reta é um conjunto aberto da reta;
(b) Um subconjunto A da reta é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}\backslash A$ é fechado.
(c) A interseção qualquer de subconjuntos fechados da reta é um conjunto fechado da reta;
(d) A união finita de subconjuntos fechados da reta é um conjunto fechado da reta;
(e) A interseção finita de subconjuntos abertos da reta é um conjunto aberto da reta.

12. Mostre que, se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto e $F \subseteq K$ é fechado, então F é compacto.

13. Mostre que a composta de funções reais contínuas é também contínua.