Por favor, justifique **todas** as questões! Respostas sem justificativas claras não serão consideradas. Você terá 4 horas para a resolver a avaliação. Boa prova!

Nome:

1. (Valor 1,5) Considere a aplicação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a + bt + ct^2) = (a + b, a + c, b + c).$$

   (a) Mostre que T é um isomorfismo e encontre o isomorfismo inverso T^{-1}.

   (b) Dadas $\mathcal{B} = \{1 + t^2, -t, t^2\}$ base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, encontre $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ e $[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

   (c) Se $S : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é a transformação linear definida por

$$S(x, y, z) = (x + y + z).1 + (y - 2z).t + (x + z).t^2,$$

   então $Ker(T \circ S) = [(1, 1, 1)]$ e $Im(T \circ S) = [(2, 1, -1), (0, 0, 1)]$?

   (d) Seja $R : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear. Se $R \circ T$ é um isomorfismo então R é isomorfismo?

2. (Valor 2,5) Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle , \rangle$. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

   (a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$, para quaisquer $u, v \in V$.

   (b) Os vetores $\|u\|\, v + \|v\|\, u$ e $\|u\|\, v - \|v\|\, u$ são ortogonais.

   (c) $\langle u, v\rangle = 0 \iff \|u + \alpha v\| \geq \|u\|$, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (d) Se $T : V \to V$ é um operador linear tal que $\langle T(v), v\rangle = \langle v, v\rangle$ para todo $v \in V$, então $T = I_V$.

   (e) Se $T : V \to V$ é um operador linear tal que $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = \mathbf{0}_V$.

   (f) Considere $V = \mathbb{R}^n$ com produto interno usual. Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ estritamente positivos, então $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}\right) \geq n^2$.

3. (Valor 2,0) Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Sejam $c = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (1, -1, 1, -1) \rangle = 0\}.$$

   (a) Determine $W^\perp$.

   (b) Determine bases ortonormais para W e $W^\perp$.

   (c) Determine P e Q, operadores de projeção ortogonal sobre W e $W^\perp$, respectivamente.

   (d) O operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T = P - Q$ é simétrico?

Cont.

4. (Valor 1,5)

   (a) Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por

   $$T(a + bt + bt^2) = b + (a + c)t + bt^2.$$

   T é diagonalizável? Caso afirmativo, encontre uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja uma matriz diagonal.

   (b) Dê exemplo de um operador linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ diagonalizável satisfazendo simultaneamente as seguintes propriedades:

   - $\lambda = 2$ é autovalor de T.
   - $Ker(T) = [t - t^2]$.
   - $T(p(t)) \neq p(t)$ para todo $p(t)$ não-nulo.

5. (Valor 2,5) Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ operador linear. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

   (a) Se λ é um autovalor de T então o auto-espaço V_λ é invariante por T.

   (b) Sejam U, W subespaços vetoriais de V. Se U, W são invariantes por T então $U \cap W$ e $U + W$ são invariantes por T.

   (c) Se $T : V \to V$ é um isomorfismo e λ é um autovalor de T, λ é um autovalor de T^{-1}

   (d) Se V está munido de produto interno, T é um operador simétrico e v_1, v_2 são autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

   (e) Se V está munido de produto interno, T é um operador simétrico, então $Ker(T) = Im(T)^\perp$

The End.