Por favor, justifique **todas** as questões! Respostas sem justificativas claras não serão consideradas. Você terá 3 horas para a resolver a avaliação. Boa prova!

Name:____

1. (Valor 1,5) Decida se os seguintes conjuntos com as operações relacionadas, formam espaço vetorial real:

   (a) $M_2(\mathbb{R})$, com as operações

   $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

   $$\alpha \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11})^{\alpha} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & (a_{22})^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

   (b) O conjunto $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(2) = 1\}$, com as operações usuais de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

2. (Valor 2,0)Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

   (a) Se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente no espaço vetorial real V, então $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ é linearmente independente em V.

   (b) Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto quaisquer de vetores no espaço vetorial V então $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$ é um conjunto linearmente dependente de V.

   (c) O conjunto $\{x, |x|\}$ é linearmente independente em $\mathcal{C}([-1,1])$

   (d) Sejam U, W subespaços de um espaço vetorial real V. Se $[U] = [W]$ então $U = W$.

   (e) Seja $U = [(1,0,2),(0,-1,0)]$ subespaço do $\mathbb{R}^3$. Então existe um único subespaço W em $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = U + W$

   (f) Se $U = [(1,0,-1),(0,1,1)]$ e $W = [(1,1,1),(1,0,0)]$, então $dim(U+W) = 3$ e $dim U \cap W = 1$.

3. (Valor 1,5)Decida se os subconjuntos S abaixo são subespaços vetoriais de V:

   (a) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$

   (b) $V = \mathcal{C}([0,1])$ e $S = \left\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : \int_0^1 f(x)dx = 0\right\}$

   (c) $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } z = 0\right\}$

4. (Valor 2,0)Considere a transformação $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, definida por, $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Prove que T é linear.

   (b) Encontre uma base e a dimensão para $Ker(T)$ e $Im(T)$

   (c) T é isomorfismo?

   (d) Encontre um subespaço W de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = Im(T) \oplus W$.

5. (Valor 3,0) Sejam V, W espaços vetoriais reais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta

   (a) Se $dimV = 4$ e $dimW = 3$, então T é injetora.

   (b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de V e $T(v_2) = 0 = T(v_4)$, então $dimIm(T) \leq 2$.

   (c) Se T for injetora, então $dimV \leq dimW$.

   (d) Se $dimV \geq dimW$, então T é sobrejetora.

   (e) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for sobrejetora, então $dimKer(T) = m - n$

   (f) Se T é injetora e $\{v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente em V, então $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é linearmente independente em W.

   (g) Se $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ é linearmente independente em W, então $\{v_1, ..., v_n\}$ é linearmente independente em V.

The End.