

## 8ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

30 de janeiro de 2016

1. Considere  $V$  um espaço vetorial real com produto interno. Sejam  $T_1, T_2$  operadores simétricos sobre  $V$ . Prove que  $T_1 \circ T_2$  é um operador simétrico sobre  $V$  se, e somente se,  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ .
2. Considere  $V$  um espaço vetorial real com produto interno e  $T$  um operador simétrico sobre  $V$ . Mostre que  $\text{Ker}(T) = (\text{Im}(T))^\perp$ .
3. Sejam  $V$  um espaço vetorial real com produto interno e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Mostre que duas quaisquer das propriedades implicam a outra:
  - a)  $T$  é simétrico.
  - b)  $T$  é uma isometria.
  - c)  $T^2 = I$ .
4. Sejam  $V$  um espaço vetorial real com produto interno e  $T : V \rightarrow V$  uma isometria. Mostre que  $T$  preserva o cosseno do ângulo entre dois elementos não-nulos.
5. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  operador linear definido por  $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ . Mostre que  $T$  é uma isometria.
6. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  operador linear definido por

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z, \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right).$$

Mostre que  $T$  é uma isometria.

7. Para que valores de  $n, m \in \mathbb{R}$  o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$T(x, y, z) = \left(x, my + \frac{\sqrt{2}}{2}z, ny + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)$$

é uma isometria?

8. Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tais que  $\{u, v\}$  é linearmente independente. Mostrar que existem apenas dois vetores de norma igual a 1 que são ortogonais simultaneamente a  $u$  e  $v$ .
9. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $W$  um subespaço vetorial de  $V$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $W$  é um **subespaço invariante por  $T$** , se  $T(W) \subset W$ , ou seja, para cada  $w \in W$ , temos  $T(w) \in W$ . Prove que, se  $T$  é um operador ortogonal e  $W$  é invariante por  $T$ , então  $W^\perp$  é invariante por  $T$ .
10. Sejam  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno usual,  $S = [(1, 1, 1)]$  e  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador de projeção ortogonal sobre  $S$ . Determine  $P(x, y, z)$ .
11. Seja  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador linear tal que  $u = P(v)$  é a projeção ortogonal de  $v \in \mathbb{R}^3$  no plano  $3x + 2y + z = 0$ . Determine  $P(x, y, z)$ ,  $\text{Im}(P)$  e  $\text{Ker}(P)$ .

12. Seja  $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c \rangle = 0\}$ , para  $c \in \mathbb{R}^n$  fixo. Então:

a) Determine  $W^\perp$ .

b) Dado  $u \in \mathbb{R}^n$ , determine  $\text{proj}_W u$  e  $\text{proj}_{W^\perp} u$ .

13. Seja  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  com produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine  $\text{proj}_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})} x^2$ .

14. Em  $\mathcal{C}([-1, 1])$  com o produto interno usual, determinar  $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ , mais próximo da função  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Dê uma interpretação geométrica a  $p(x)$ .

15. Em  $\mathbb{R}^4$  com o produto interno usual seja  $S = [(1, 1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1)]$ , Encontre a melhor aproximação de  $(2, 1, 3, 1)$  em  $S$ .

16. Considere  $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

Determine a melhor aproximação de  $x^3$  no subespaço  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

17. Sejam  $\mathbb{R}^3$  com produto interno usual e  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ . Determine os vetores dos subespaços  $S$  e  $S^\perp$  que melhor aproximam o vetor  $(1, 2, 1)$ .

18. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $v \in V$  autovetor de  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$  e  $\alpha \neq 0$ . Mostre que  $v$  é autovetor do operador  $\alpha T$ , associado ao autovalor  $\alpha\lambda$ .

19. Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Mostre que  $\lambda = 0$  é autovalor de  $T$  se, e somente se,  $T$  não é injetor.

20. Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear idempotente. Mostre que os autovalores de  $T$  são  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$ .

21. Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é **auto-reflexivo** se  $T^2 = I_V$ , isto é, se para todo  $v \in V$ ,  $T(T(v)) = v$ . Mostre que os autovalores de um operador auto-reflexivo são  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$ .

22. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $v \in V$  autovetor de  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$ . Mostre que  $v$  é autovetor de  $\alpha T + \beta I_V$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  associado ao autovalor  $\alpha\lambda + \beta$ .

23. Determine o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que satisfaça as seguintes propriedades simultaneamente:

a)  $\lambda = 1$  é um autovalor de  $T$  associado aos autovetores da forma  $v_1 = (y, -y)$  onde  $y \neq 0$ .

b)  $\lambda = 3$  é um autovalor de  $T$  associado aos autovetores da forma  $v_2 = (0, y)$  onde  $y \neq 0$ .

24. Sejam  $\mathbb{R}^4$  com produto interno usual,  $W = [(1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)]$  e  $P : V \rightarrow V$  operador de projeção ortogonal sobre  $W$ . Determinar os autovalores e autovetores de  $P$ .

25. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear,  $v \in V$  autovetor de  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$ . Mostre que  $v$  é um autovetor do operador  $T^n$  associado ao autovalor  $\lambda^n$ , para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .

26. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é **nilpotente**, se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n = 0$ , isto é, se  $T^n(v) = 0_V$ , para todo  $v \in V$ . Nessas condições, mostre que o único autovalor de  $T$  é  $\lambda = 0$ .

27. Sejam  $V$  um espaço vetorial real,  $T : V \rightarrow V$  um isomorfismo e  $v \in V$  autovetor de  $T$  associado a um autovalor  $\lambda$ . Mostre que  $v$  é um autovetor de  $T^{-1}$  associado ao autovalor  $\frac{1}{\lambda}$ .

28. Considere  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  definido por

$$T(p(t)) = p(t) + (t+1)p'(t).$$

Determine os autovalores e autovetores de  $T$ .

29. Considere  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z).$$

Determine os autovalores e autovetores de  $T$ .

30. Seja  $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Dizemos que  $D$  é uma matriz **diagonal** se for uma matriz triangular superior e inferior, simultaneamente. Nessas condições, mostre que  $D$  possui um conjunto de  $n$  autovetores, linearmente independente.

31. Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Mostre que  $A$  e  $A^t$  possuem os mesmos autovalores.

32. Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  operador linear tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de  $T$ .  $T$  é isomorfismo?

33. Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $\lambda \neq 0$  autovalor de  $A$ . Então  $\frac{1}{\lambda}$  é autovalor de  $A^{-1}$ .

34. Determine os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

35. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um operador linear,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  base de  $\mathbb{R}^3$  e  $S = [v_1, v_3]$ . Sabendo que  $T(v) = v$  para todo  $v \in S$  e que  $T(v_2) = v_1 + 2v_2 + 3v_3$ . Determine os autovalores e autovetores de  $T$ .

36. Seja  $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  definido por

$$T(p(t)) = p(t) + p'(t) + t^2 p''(t).$$

Determine os autovalores e autovetores de  $T$ .

37. Determine os autovalores e autovetores das matrizes  $A$  e  $A^{-1}$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

38. Determine os autovalores e autovetores das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

39. Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , matrizes semelhantes. Mostre que se  $A$  é invertível, então  $B$  é invertível e  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  são semelhantes.
40. Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , matrizes semelhantes. Estabeleça a relação entre os autovalores e autovetores de  $A$  e  $B$ .
41. Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de  $A$ .

42. Sejam  $A, B$  matrizes invertíveis de mesma ordem. Mostre que  $AB^{-1}$  e  $B^{-1}A$  possuem os mesmos autovalores.
43. Verifique se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (-3x - 4y, 2x + 3y, -z),$$

é diagonalizável.

44. Seja  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  definido por

$$T(p(t)) = p(t) + tp'(t).$$

Determine uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  de modo que  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja uma matriz diagonal.

45. Seja  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  definido por

$$T(a + bt + ct^2) = (2b + c) + (2b - c)t + 2ct^2.$$

Verifique se  $T$  é um operador diagonalizável.

46. Seja  $T : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  definido por  $T(A) = A^t$ . Determine uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  de modo que  $[T]_{\mathcal{B}}$  seja uma matriz diagonal.

47. Sejam  $V$  um espaço vetorial real tal que  $\dim(V) = n$  e  $T : V \rightarrow V$  operador linear que possui somente dois autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  com  $\dim(V_{\lambda_1}) = n - 1$ . Prove que  $T$  é um operador diagonalizável.

48. Dê exemplo de um operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diagonalizável tal que  $\text{Ker}(T) = [(1, 0, 1)]$

49. Dê exemplo de um operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diagonalizável tal que  $\text{Im}(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$

50. Dê exemplo de um operador linear  $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  diagonalizável satisfazendo simultaneamente as seguintes propriedades:

- a)  $\lambda = -3$  é autovalor de  $T$ .
- b)  $\text{Ker}(T) = [1 - x]$ .
- c)  $T(p(x)) = p(x)$  para todo  $p(x)$  não-nulo.

51. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine se possível, uma matriz  $P \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$  invertível, tal que  $P^{-1}AP$  seja uma matriz diagonal.

52. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $A^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

53. Determine um operador linear diagonalizável  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

a)  $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ .

b)  $T(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 2, 0)$ .

c)  $(0, 1, 0, 0) \in \text{Im}(T)$ .

d)  $\lambda = -3$  é autovalor de  $T$ .

54. Determine um operador linear diagonalizável  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , que satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

a)  $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ .

b)  $\text{Im}(T) = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)]$ .

c)  $\lambda = 2$  é autovalor de  $T$ , com multiplicidade algébrica igual a 2.