

7ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

27 de janeiro de 2016

1. Considere $\mathcal{C}([1, e])$, munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_1^e \ln(t) f(t) g(t) dt,$$

onde e é o número de Euler. Determine as funções da forma $g(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, que são ortogonais à função $f(x) = 1$. Dê uma interpretação geométrica.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x).$$

Determine uma base ortogonal para $\text{Ker}(T)^\perp$ (considerar $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual).

3. Considere $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$, com produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p'(t) q'(t) dt, \quad \forall p, q \in U.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal de $[1 - x]$ em U .

4. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Dados $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, -1, 1)$. Determine w_1 e w_2 tais que $u = w_1 + w_2$, $w_1 \perp u$ e $\{u, w_2\}$ seja linearmente dependente. Dê uma interpretação geométrica.

5. Considere $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t) q(t) dt, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}),$$

e o subespaço $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}$. Dado o polinômio $q(x) = 1 + 2x - x^2$, determine $p(x) \in S$ e $r(x) \in S^\perp$, tais que $q(x) = p(x) + r(x)$.

6. Considere $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t) q(t) dt, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para $[1 + x, 1 - x^2]^\perp$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

7. Considere $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para $[2 - x]^\perp$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

8. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre uma base para $[(0, 1, -2, 1)]^\perp$.

9. Considere $\mathbb{R}^5$ com o produto interno usual. Encontre uma base para $[(1, 2, 3, -1, 2), (2, 1, 0, 2, -1)]^\perp$.
10. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$. Encontre uma base ortogonal para $S^\perp$.
11. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Encontre uma base ortogonal para $[(-1, 1, 1, -1)]^\perp$.
12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x - y - z, -x + y + 2z, x - y).$$

Determine uma base ortogonal para $Im(T)$ (considerar $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual).

13. Sejam V um espaço vetorial de dimensão com produto interno, U, W subespaços vetoriais de V . Prove que $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.