

6ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

22 de janeiro de 2016

1. Seja V um espaço vetorial real. Considere que $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ são produtos internos em V . Prove que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2, \quad \text{para todo } u, v \in V,$$

define um produto interno em V .

2. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, mostre que existe único $u \in V$ tal que

$$\langle u, v_i \rangle = \alpha_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

3. Considere o espaço vetorial

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}.$$

Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p'(x)q'(x)dx \quad \text{para todo } p, q \in U,$$

define um produto interno em U .

4. Considere o espaço vetorial

$$V = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b]) : f(a) = f(b) = 0\}.$$

Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f'(x)g'(x)dx \quad \text{para todo } f, g \in V,$$

define um produto interno em U .

5. Verifique se a aplicação $F : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(f, g) = \int_0^{1/2} f(x)g(x)dx \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{C}([0, 1]),$$

define um produto interno em $\mathcal{C}([0, 1])$.

6. Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Determine a matriz do produto interno em relação a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

7. Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 4x_2 y_2, \quad \text{para todo } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz do produto interno em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

8. Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}),$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine a matriz do produto interno em relação a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

9. Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Sendo $u = (1, 1)$ e $v = (3, -1)$, encontrar um vetor $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle u, w \rangle = -2$ e $\langle v, w \rangle = 1$.

10. Sejam V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $u, v \in V$ tais que $\|u\| = 4$, $\|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 5$. Determinar $\langle u, v \rangle$.

11. Sejam V um espaço com produto interno e $u, v \in V$. Provar que:

$$\text{a) } \|u\| = \|v\| \iff \langle u + v, u - v \rangle = 0.$$

$$\text{b) } \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \langle u, v \rangle = 0.$$

$$\text{c) } \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 = \langle u, v \rangle.$$

12. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determinar $y \in \mathbb{R}$ de maneira que $\|u\| = \sqrt{41}$ e $u = (6, y, -1)$.

13. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Prove que $\{u, v\}$ é linearmente dependente se, e somente se $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$.

14. Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a aplicação $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(u, v) := \alpha \langle u, v \rangle,$$

define um produto interno em V ?

15. Sejam V espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \rightarrow V$ um isomorfismo. Mostre que a aplicação $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(u, v) = \langle T(u), T(v) \rangle$, define um produto interno em V .

16. Sejam V espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $u, v \in V$ não-nulos. Se $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre u e v prove que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \|v\| \cos(\theta).$$

17. Seja V um espaço com produto interno. Sabendo que $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, onde $u, v \in V$, determine $\alpha \in \mathbb{R}$, de maneira que $\langle u + \alpha v, u - \alpha v \rangle = 0$.

18. Considerando $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, sejam $u = (3, 2, -1, 0)$ e $v = (1, 2, 0, 1)$. Determinar $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$ e cosseno do ângulo entre u e v .

19. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ quaisquer. Mostre que

$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \right)^2 \leq \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{n},$$

utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz $\mathbb{R}^n$.

20. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Dados os polinômios $p(x) = x + 2$, $q(x) = 3x - 2$ e $h(x) = x^2 - 3$, determine $\langle p, q \rangle$, $\langle p + q, q \rangle$, $\|p\|$, $\|q + h\|$, $d(p, h)$ e cosseno do ângulo entre p e h .

21. Considere $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno usual

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A), \quad \text{para todo } A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine $\langle A, B \rangle$, $\langle A + B, C \rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e o cosseno do ângulo entre A e B .

22. Considerando $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $(1, 2, \alpha, 3)$ e $(\alpha, 2, \alpha, -2)$ sejam ortogonais.

23. Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}),$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Determine todos os polinômios de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ que são ortogonais ao polinômio $1 + x$.

24. Considere munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}).$$

Determine todos os polinômios de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ que são ortogonais ao polinômio $1 + x$.

25. Considere $\mathcal{C}([0, 1])$ com o produto interno usual. Determine uma função da forma $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ que seja ortogonal com a função $g(x) = x^2$.

26. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Verifique que o conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 2, -3), (5, -4, -1)\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $(1, 5, -7)$ em relação a essa base.

27. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Determine uma base ortogonal para o subespaço $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 4), (1, 2, -4, -3)]$.

28. Considere o espaço $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ com o produto interno usual. Mostre que os seguintes conjuntos $\{\sin \theta, \sin 2\theta, \dots, \sin n\theta, \dots\}$ e $\{1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots, \cos n\theta, \dots\}$ são ortogonais.

29. Considere $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad \text{para todo } p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Obtenha uma base ortogonal para esse espaço a partir da base canônica.