

5ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

27 de janeiro de 2016

1. Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Então $T^{-1} : W \rightarrow V$ é um isomorfismo.
2. Sejam U, V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita. Se $U \cong V$ e $V \cong W$, mostre que $U \cong W$.
3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1} .
4. Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(1, -1) = 2 + t$ e $T(0, 1) = t - 1$. Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1} .
5. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \rightarrow V$, $P : V \rightarrow V$ transformações lineares tais que $T \circ P = P \circ T$. Prove que $\text{Ker}(T) + \text{Ker}(P) \subset \text{Ker}(T \circ P)$.
6. Verifique se o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ é invertível. Caso afirmativo, determinar T^{-1} .
7. Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $T^2 + T + I = 0$. Mostre que T é invertível e determine uma expressão para T^{-1} .
8. Seja V um espaço vetorial real e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Dizemos que T é **idempotente** se $T^2 = T$, isto é,

$$(T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

Nessas condições, prove que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

9. Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(1, 1) = 1 - t$ e $T(1, -1) = 1 + 3t$. Mostre que T é um isomorfismo e determine seu isomorfismo inverso T^{-1} .
10. Dado o elemento $q(t) = 3 + t \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Considere as transformações lineares $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = q(t)p'(t) + 2p(t)$ e $P : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $P(x + yt + zt^2) = (x + y, z, x - y)$. Determine $P \circ T$ e verifique se é um isomorfismo entre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.
11. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $P(x, y, z) = (y - z, z - x)$. Pedem-se:
 - a) Determine $P \circ T$ e uma base para $\text{Ker}(P \circ T)$.
 - b) Determine $T \circ P$ e uma base para $\text{Im}(T \circ P)$.
 - c) Verifique se $T \circ P$ é isomorfismo de $\mathbb{R}^3$.
12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x - y + z, -x + 2z)$. Determine $[T]_{\text{can}}$.
13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, x + 2y + z)$. Determine $[T]_{\text{can}}$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$. Determine $[T]_{can}$, $[T]_{can, \mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}, can}$, $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C}, can}$ e $[T]_{can, \mathcal{C}}$, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1), (0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, -1), (1, 1)\}$.
15. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z)$. Determine $[T]_{can}$, $[T]_{can, \mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}, can}$, $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{C}}$, $[T]_{\mathcal{C}, can}$ e $[T]_{can, \mathcal{C}}$, onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.
16. Seja U um subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, gerado por $\mathcal{B} = \{t - t^2 + t^3, 1 + t + t^2\}$. Considere a transformação linear $T : U \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p(t)) = p'(t) + (t + 1)p(0)$. Se

$$[T]_{\mathcal{B}, can} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $[p(t)]_{\mathcal{B}}$, sabendo que $[T(p(t))]_{can} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

17. Mostre que a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(p(t)) = (p(-1), p(0), p(1))$ é bijetora. Determine $[T]_{can}$.

18. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{can, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

- a) Determine $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.
b) Determine uma base para $Im(T)$.
c) T é injetora?

19. Sejam $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e $S = [v_1, v_2, v_3]$.

- a) Se $T(v) = v$ para todo $v \in S$ e $T(v_4) = v_1 + v_3$, determine $[T]_{\mathcal{C}}$.

- b) Se $[I]_{can, \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine $[T(e_1)]_{\mathcal{C}}$.