4^a Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

13 de janeiro de 2016

1. Decida se cada uma das transformações abaixo são lineares:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, y) + (a, b)$, onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é fixo.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (xcos(\theta) - ysen(\theta), xsen(\theta) + ycos(\theta))$, onde $\theta \in [0, 2\pi[$ é fixo.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (z, x + y)$.

   e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, 2)$.

   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$.

   g) $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

   h) $T : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ definida por

   $$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{11} - 3a_{31} & 0 & a_{33} - 3a_{31} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix}$$

   .

   i) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = tp'(t)$.

   j) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(p(t)) = p'(t) + t^2p''(t)$.

2. Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x, -y)$. Faça a representação gráfica da imagem do triângulo de vértices $(-1, 4)$, $(3, 1)$ e $(2, 6)$ pela tranformação T.

3. Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x - y, -x + 2y)$. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:

   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = 3(x, y\},$$

   $$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (x, y)\}.$$

4. Em cada caso, determine uma transformação linear:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $T(1, 0, 1) = (1, 1, 1)$ e $T(0, -1, 1) = (1, 1, 0)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $T(1, 1) = t^2 - 1$, $T(1, -1) = t^3 - 1$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1, 0, 0) = 1 - t$, $T(0, 1, 0) = 1 + t$ e $T(0, 0, 1) = 1 - t^2$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, -1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1)$.

5. Sejam V um espaço vetorial real e $u, v \in V$. O **segmento de reta** com extremidades u, v é o conjunto

   $$[u, v] = \{(1 - t)u + tv : t \in [0, 1]\}.$$

   Dizemos que um subconjunto $S \subset V$ é **convexo** se $[u, v] \subset S$, para quaisquer $u, v \in S$. Mostre que uma transformação linear $T : V \to W$ transforma todo conjunto convexo $S \subset V$ num conjunto convexo $T(S) \subset W$.

6. Determinar base para $Ker(T)$, $Im(T)$, o posto e a nulidade das seguintes transformações lineares:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$.

   b) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = p'(x) + xp(x)$.

   c) $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = -p''(x) + p(x)$.

   c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(p(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0)$.

7. Seja $U \subset \mathbb{M}(\mathbb{R})$ o subespaço das matrizes diagonais. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to U$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b + 2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a + b & 0 \\ 0 & 0 & -a - 2b + 2c \end{bmatrix}.$$

   Determinar base para $Ker(T)$, $Im(T)$, o posto e a nulidade

8. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

9. Considere os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

$$W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)].$$

   Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T) = U$ e $Ker(T) = U \cap W$

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(2, 1) = (3, 0, 2)$ e $T(1, 2) = (1, 1, 0)$. Determine uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $Ker(P) = Im(T)$.

11. Verifique as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

    a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que é injetora.

    b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é sobrejetora.

    b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que é bijetora.

12. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $\beta = \{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$. Mostre que somente uma das alternativas se verifica:

    a) $\{T(u), T(v)\}$ é linearmente independente.

    b) o posto de T é igual a 1.

    c) $Im(T) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

13. Sejam V um espaço vetorial real com $dim(V) = n$ e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $Im(T) = Ker(T)$. Mostre que n é par. Considerando $V = \mathbb{R}^4$, de exemplo de uma transformação linear com essas propriedades.

14. Determine uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, tal que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:

    a) $1 + x^2 \in Ker(T)$

    b) $1 \notin Ker(T)$

    c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$.