3^a Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

9 de janeiro de 2016

1. Verifique quais dos subconjuntos:

   a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,2,5)\}$

   b) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

   são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$.

2. Verifique quais dos subconjuntos:

   a) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^2\}$

   b) $\{x(x-1), x^3, 2x^3-x^2, x\}$

   são linearmente independentes em $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

3. Mostre que o conjunto

$$\beta = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$$

   é linearmente independentes em $\mathbb{R}^4$.

4. Considere as seguintes funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Mostre que o conjunto $S = \{f(x), g(x)\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $\mathcal{C}([-1,1])$.

5. Considere as seguintes funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x\,|x|$. Mostre que o conjunto $S = \{f(x), g(x)\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $\mathcal{C}([-1,1])$. Entretanto, é linearmente dependente em $\mathcal{C}([0,1])$ e em $\mathcal{C}([-1,0])$.

6. Determine três elementos de $\mathbb{R}^3$ que sejam linearmente dependentes e tais que dois quaisquer sejam linearmente independentes.

7. Mostre que o conjunto $S = \{1, e^x, xe^x\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

8. Mostre que o conjunto $S = \{1, e^x, e^{2x}\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

9. Mostre que as matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   são LI em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

10. Suponha que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ seja LI no espaço vetorial real V e considere $v \in V$. Prove que o conjunto $\{v_1, ..., v_n, v\}$ é LI em V se, e somente se, $v \notin [v_1, ..., v_n]$. Interprete geometricamente esse resultado em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

11. Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, ..., v_n \in V$ e considere $v \in [v_1, ..., v_n]$. Prove que $[v_1, ..., v_n] = [v, v_1, ..., v_n]$. Interprete geometricamente esse resultado em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

12. Verifique se o elementos

$$u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (0,1,1,1), u_3 = (0,0,1,1), u_4 = (0,0,0,1)$$

formam uma base para $\mathbb{R}^4$.

13. Encontre uma base para os seguintes subespaços de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$:
a) $U = \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$
b) $W = \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^t = A\}$

14. Mostre que o conjunto
$$\beta = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$$
é uma base para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

15. Determine uma base para o subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\}.$$

16. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : a - 2c = 0\}$$

$$W = [1 - x, x - x^2].$$

Determine uma base para os seguintes subespaços: $U + W$ e $U \cap W$.

17. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\beta = \{(a,1,0), (1,a,0), (0,1,a)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$?

18. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão finita de um espaço vetorial real V. Determine condições necessárias e suficientes sobre U e W para que $dim(U \cap W) = dim(W)$.

19. Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ contendo os elementos

$$u_1 = (1,1,1,0), u_2 = (1,1,2,1)$$

.

20. Sejam U e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ tais que $dim(U) = 1$, $dim(W) = 2$ e U não está contido em W. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

21. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$. Considerando que

$$U \cap W = [(1,2,1,0), (-1,1,0,1), (1,5,2,1)].$$

Qual é a dimensão do subespaço $U + W$?

22. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2z = 0\}$ e $W = [(1,1,0), (0,0,2)]$. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços:
$$U \cap V,\ V + W,\ U + V + W.$$