

2ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

6 de janeiro de 2016

1. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Mostre que o subconjunto

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

2. O **traço** de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A)$, é a soma dos elementos de sua diagonal principal, ou seja

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Mostre que o subconjunto dado por

$$S = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([-a, a])$ com $a \in \mathbb{R}_+$. Mostre que os seguintes subconjuntos

$$U = \{f \in \mathcal{C}([-a, a]) : f(-x) = f(x); x \in [-a, a]\}$$

$$V = \{f \in \mathcal{C}([-a, a]) : f(-x) = -f(x); x \in [-a, a]\}$$

são subespaços vetoriais de $\mathcal{C}([-a, a])$.

4. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\}.$$

Determine um sistema de geradores para U .

6. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0 \text{ e } -x + 2y + z - t = 0\}.$$

Determine um sistema de geradores para U .

7. Seja W o subespaço de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique se a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

pertence ao subespaço W .

8. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os subespaços gerados

$$U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)] \quad \text{e} \quad W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $V = U \cap W$.

9. Considere os seguintes subespaços

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$$

Pede-se:

(a) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.

(b) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

(c) O subespaço $U + W$ é uma soma direta? Justifique sua resposta.

10. Seja U o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo elemento $u_1 = (1, 0, 0)$ e W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos elementos $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 1)$. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

11. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} \text{ e } W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}.$$

Mostre que $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

12. Considere o subespaço V do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0 \text{ e } -x + 3y + 2z = 0\}.$$

Determine um subespaço W do $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

13. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}^3$, do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Mostre que S é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Dado o subespaço

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\},$$

determine um sistema de geradores para o subespaço $S \cap U$.