

1ª Lista de Álgebra Linear - Verão 2016 IME-USP

Thiago Grando

4 de janeiro de 2016

1. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, munido das operações de soma e multiplicação por escalar usuais, é um espaço vetorial real.

2. Verifique se o conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, munido das operações:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 + y_2) \\ \alpha \odot (x, y) &= (x^\alpha, \alpha y)\end{aligned}$$

é um espaço vetorial real.

3. Verifique se o conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, munido das operações:

$$\begin{aligned}x \oplus y &= xy, \quad \forall x, y \in V \\ \alpha \odot x &= x^\alpha, \quad \forall x \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

é um espaço vetorial real.

4. Sejam V e W espaços vetoriais reais. Mostre que o conjunto

$$V \times W = \{(v, w) : v \in V \text{ e } w \in W\},$$

munido das seguintes operações:

$$\begin{aligned}(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \\ \alpha \odot (v, w) &= (\alpha v, \alpha w), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

é um espaço vetorial real.

5. Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais de ordem n , que denotaremos por $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, com a operação de adição de elementos, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, definida por $A \oplus B = [a_{ij} + b_{ij}]$ e a operação de multiplicação por escalar definida por $\alpha \odot A = [\alpha a_{ij}]$, é um espaço vetorial real.

6. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é uma função contínua}\},$$

munido das seguintes operações:

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}([a, b]) \\ (\alpha \odot f)(x) &= \alpha f(x), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]), \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

é um espaço vetorial real.

7. Sejam V um espaço vetorial real, $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes propriedades:

a) $0 \odot u = 0_V$;

- b) $\alpha \odot 0_V = 0_V$;
- c) $(-\alpha) \odot u = -(\alpha \odot u) = \alpha \odot (-u)$;
- d) se $\alpha \odot u = 0_V$, então $\alpha = 0$ ou $u = 0_V$;
- e) se $\alpha \odot u = \alpha \odot v$ e $\alpha \neq 0$, então $u = v$;
- f) se $\alpha \odot u = \beta \odot u$ e $u \neq 0_V$, então $\alpha = \beta$.

8. Verifique se o subconjunto $S = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) : f(a) = 1\}$ é subespaço vetorial de $\mathcal{C}([a, b])$.

9. Verifique se o subconjunto

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) : \int_0^1 f(x) dx \geq 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}([0, 1])$.

10. Mostre que o subconjunto

$$S = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \int_{-1}^1 p(x) dx + p'(0) = 0 \right\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

11. Verifique se o subconjunto das matrizes idempotentes,

$$S = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^2 = A\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Mostre que o subconjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

13. Considere o conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com as seguintes operações:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2 + 5, y_1 + y_2) \\ \alpha \odot (x, y) &= (\alpha x + 5(\alpha - 1), \alpha y). \end{aligned}$$

Verifique se V é um espaço vetorial real e também se o subconjunto $W = \{(x, y) \in V : x = -5\}$ é subespaço vetorial de V .

14. Mostre que os seguintes subconjuntos

$$S_1 = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$$

$$S_2 = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

15. Considere o subconjunto

$$S = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha(1, 2) + (3, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Verifique se S é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.