Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

2a. Avaliação de matemática

Turma 112 - 28/09/2016

Prof. Dr. Thiago Grando

A

Nome : GABARITO

Nº prontuário :

Assinatura :

Q	N
1	
2	
3	
Total	

Observações - Leia com atenção!

1. A prova pode ser feita a lápis. **O cabeçalho deve ser preenchido a tinta.**

2. Favor não desgramprear a prova. Cada questão deve ser resolvida na página em que está impressa.

3. Em cada questão **justifique** sua resolução.

4. Manter celulares **desligados e guardados**.

5. Você terá 1h 30 min para a resolução da prova.

6. **Leia** os enunciados das questões **com bastante atenção** e **Boa Prova**.

1a. questão: (4,0) Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$. Pede-se:

a. O domínio da função f.

b. É f injetora e sobrejetora? Determine $Im(f)$.

c. É f inversível? Se sim, determine a função inversa f^{-1} de f.

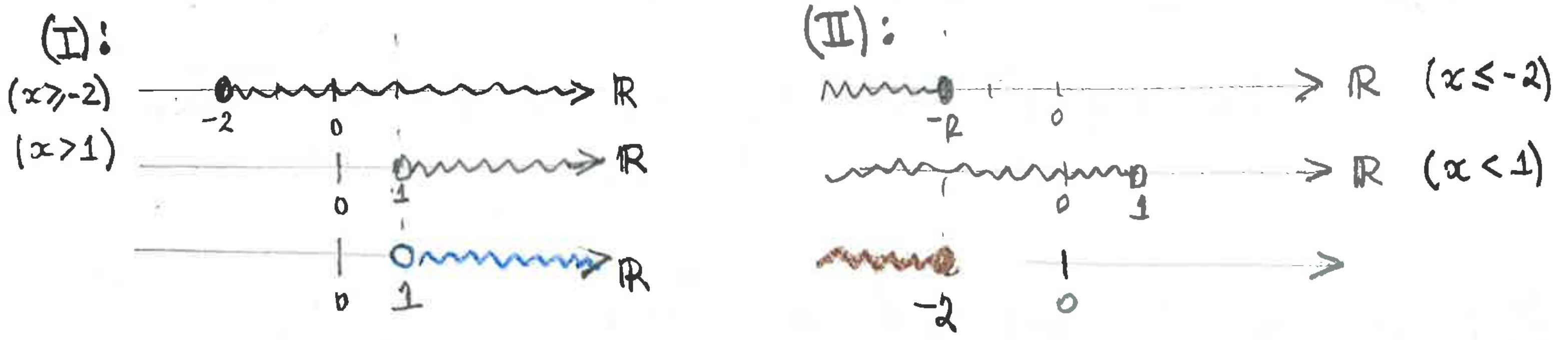
d. Esboce o gráfico de f e f^{-1}.

SOLUÇÃO

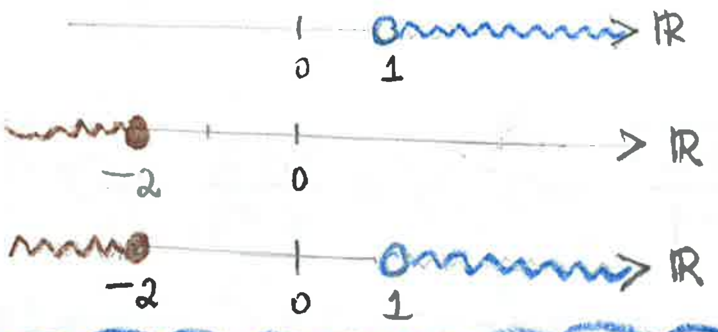
a) Sabemos que raiz quadrada existe apenas para números reais maiores ou iguais a zero. Logo:

$$\frac{x+2}{x-1} \geq 0 \iff \begin{cases} x+2 \geq 0 \ \text{e} \ x-1 > 0 \\ \text{ou} \\ x+2 \leq 0 \ \text{e} \ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -2 \ \text{e} \ x > 1 \quad (\mathrm{I}) \\ x \leq -2 \ \text{e} \ x < 1 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$



Logo o domínio é a união entre:



Portanto $\boxed{Dom(f) =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[}$

b)

1º Verifiquemos que f é injetora:

Sejam $x_1, x_2 \in Dom(f)$. Então existe $f(x_1)$ e $f(x_2)$.

$$f(x_1) = \sqrt{\frac{x_1+2}{x_1-1}} \quad e \quad f(x_2) = \sqrt{\frac{x_2+2}{x_2-1}}$$. Fazendo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{\frac{x_1+2}{x_1-1}} = \sqrt{\frac{x_2+2}{x_2-1}} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{x_1+2}{x_1-1}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x_2+2}{x_2-1}}\right)^2 \Rightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1} = \frac{x_2+2}{x_2-1} \Rightarrow$$

$$(x_1+2)\cdot(x_2-1) = (x_2+2)(x_1-1) \Rightarrow$$

$$\cancel{x_1x_2} - x_1 + 2x_2 - \cancel{2} = \cancel{x_2x_1} - x_2 + 2x_1 - \cancel{2} \Rightarrow$$

$$3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow f \text{ é injetora.}$$

2º: Verifiquemos que f é sobrejetora

Dado $y \in CD(f)$, vamos encontrar $x \in Dom(f)$ tal que $y = f(x)$.

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \Rightarrow y^2 = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow (x-1)y^2 = x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy^2 - y^2 = x+2 \Rightarrow xy^2 - x = 2+y^2 \Rightarrow x(y^2-1) = 2+y^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2+y^2}{y^2-1}, \quad \text{com } y \neq \pm 1 \text{. Logo } \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

não ocorre!

Vejamos que $f(x) = y$:

$$f(x) = f\left(\frac{2+y^2}{y^2-1}\right) = \sqrt{\frac{\frac{2+y^2}{y^2-1}+2}{\frac{2+y^2}{y^2-1}-1}} = \sqrt{\frac{\frac{2+y^2+2(y^2-1)}{\cancel{y^2-1}}}{\frac{2+y^2-(y^2-1)}{\cancel{y^2-1}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2}+y^2+2y^2-\cancel{2}}{2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}+1}} = \sqrt{\frac{3y^2}{3}} = \sqrt{y^2} = |y| \overset{y \geq 0}{=} y$$

Portanto $f:]-\infty,-2] \cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ é sobrejetora!

c) Como f é injetora e sobrejetora, f é bijetora e logo inversível. Vamos encontrar a expressão para f^{-1}:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \implies x = \sqrt{\frac{y+2}{y-1}} \quad \text{(Troca de variáveis)}$$

$$\implies x^2 = \frac{y+2}{y-1} \implies (y-1)x^2 = y+2 \implies yx^2 - x^2 = y+2 \implies$$

$$yx^2 - y = 2 + x^2 \implies y(x^2-1) = 2+x^2 \implies$$

$$y = \frac{2+x^2}{x^2-1}, \text{ com } x \neq \pm 1 \text{. Logo:}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2+x^2}{x^2-1}$$ é a candidata à inversa de f.

Vejamos que f^{-1} é a inversa de f:

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2+x^2}{x^2-1}\right) = \sqrt{\frac{\frac{2+x^2}{x^2-1}+2}{\frac{2+x^2}{x^2-1}-1}} =$$

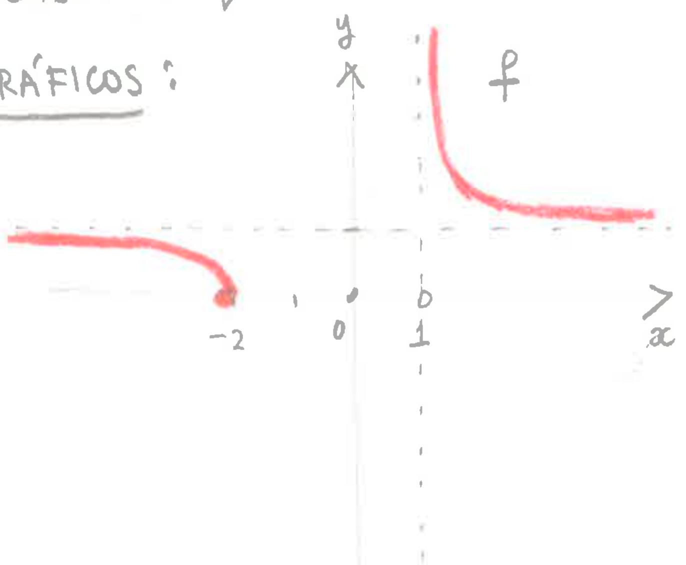
$$\sqrt{\frac{\frac{2+x^2+2(x^2-1)}{\cancel{x^2-1}}}{\frac{2+x^2-(x^2-1)}{\cancel{x^2-1}}}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}+x^2+2x^2-\cancel{2}}{2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1}} = \sqrt{\frac{3x^2}{3}} = \sqrt{x^2} = |x| \underset{\substack{\uparrow \\ x\geq 0}}{=} x$$

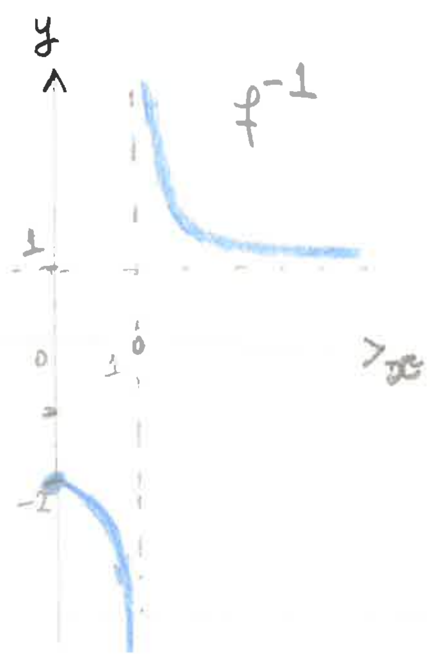
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right) = \frac{2+\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\right)^2-1} = \frac{2+\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x+2}{x-1}-1} =$$

$$\frac{\frac{2(x-1)+x+2}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+2-(x-1)}{\cancel{x-1}}} = \frac{2x-\cancel{2}+x+\cancel{2}}{\cancel{x}+2-\cancel{x}+1} = \frac{3x}{3} = x.$$

Logo f^{-1} é inversa de f.

GRÁFICOS:





2a. questão: (3,0) Quando está a uma altura h (em km) acima do solo, um vigia consegue enxergar pessoas a uma distância de $d(h) = 112,88\sqrt{h}$ km.

a. Determine a função inversa de d e indique seu domínio.

b. Usando a inversa, determine que altura deve ter a torre de observação de um forte, para que seu vigia enxergue pessoas a 10 km de distância.

SOLUÇÃO:

$\mathrm{Dom}(d) = \mathbb{R}^+$

a) $y = d(h) = 112,88\sqrt{h} \Rightarrow$

$h = 112,88\sqrt{y} \Rightarrow h^2 = (112,88)^2 \cdot y \Rightarrow$

(TROCA DE VARIÁVEIS)

$$y = \frac{h^2}{(112,88)^2}$$

Logo $d^{-1}(h) = \dfrac{h^2}{(112,88)^2}$ é a candidata à inversa de d.

Verifiquemos que ela é inversa:

$$d(d^{-1}(h)) = d\left(\frac{h^2}{112,88^2}\right) = 112,88\sqrt{\frac{h^2}{112,88^2}}$$

$$= \frac{112,88}{112,88}|h| = |h| \underset{h \geq 0}{=} h.$$

$\mathrm{Dom}(d^{-1}) = \mathbb{R}^+$.

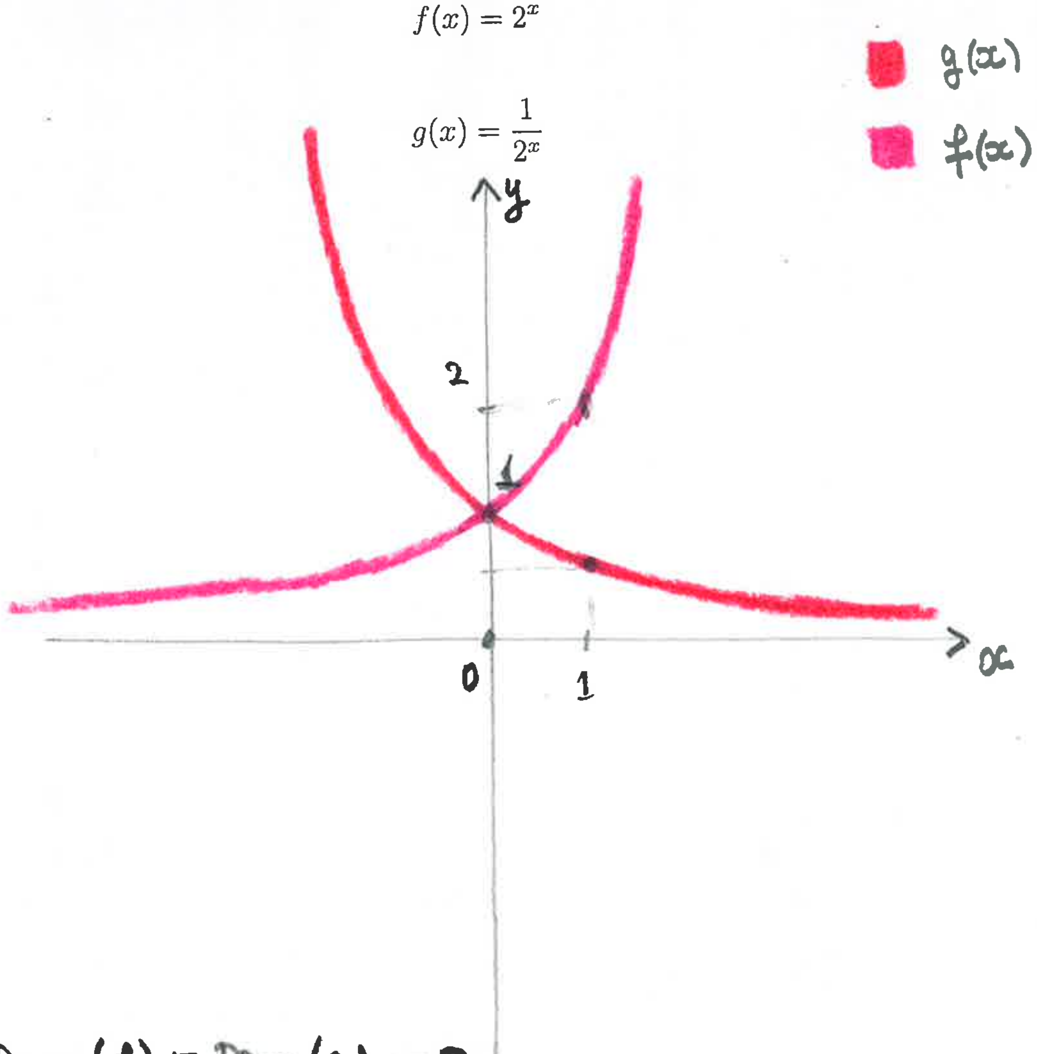
b) $d^{-1}(10) = \dfrac{10^2}{112,88^2} = 0,0078481 \approx 0,00785$ Km.

3a. questão: (2,0) Em um mesmo plano esboce o gráfico e determine domínio e imagem das seguintes funções:

$$f(x) = 2^x$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2^x}$$



Dom (f) = Dom (g) = $\mathbb{R}$

Im (f) = Im (g) = $\mathbb{R}^+$