

3ª Lista de exercícios MAT 0320 IME-USP - Introdução à Análise Complexa

Prof. Thiago Grando

9 de junho de 2017

1. Use a antiderivada para mostrar que para toda curva γ que se estende de z_1 a z_2 ,

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Seja γ a semi-circunferência, de $-3i$ a $3i$ orientada no sentido anti-horário. Mostre que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \pi i$.

3. Calcule cada uma das seguintes integrais onde o caminho entre os limites de integração é uma curva qualquer.

a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$. b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$. c) $\int_1^3 (z-3)^3 dz$.

4. Mostre que se z^i é valor principal, então

$$\int_{\gamma} z^i dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i).$$

5. Suponha que f' e g' são analíticas para todo z , e seja γ um caminho qualquer que liga z_1 a z_2 . Mostre que

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz.$$

6. Seja $f = u + iv$ contínua que possui derivadas parciais em relação a x e y contínuas numa vizinhança de $z = 0$. Mostre que f é diferenciável em $z = 0$ se, e somente se,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|=r} f(z)dz = 0.$$

7. Use o Teorema de Green para mostrar que Área de $D = -\frac{i}{2} \int_C \bar{z} dz$.

8. Para cada uma das funções f , descreva o domínio de analiticidade e aplique o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que $\int_C f(z)dz = 0$, onde γ é a circunferência $|z| = 1$:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$. b) $f(z) = ze^{-z}$.

O que acontece com c) $f(z) = (2z - i)^{-2}$?

9. Seja γ a fronteira do domínio entre a circunferência $|z| = 4$ e o retângulo de lado $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Supondo que γ está orientada de forma que os pontos do domínio se encontram ao lado esquerdo de γ , explique o porque $\int_C f(z)dz = 0$ quando:

a) $f(z) = \frac{z+2}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$. b) $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$.

10. Sejam r, R constantes reais com $0 < r < R$. Denote por γ_r a circunferência $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{R+z}{(R-z)z} dz = 1.$$

Com isso, verifique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta)} d\theta = 1.$$