

1ª Lista de exercícios MAT 0320 IME-USP - Introdução à Análise Complexa

Prof. Thiago Grando

28 de março de 2017

1. Descreva os seguintes conjuntos:

a) $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$, onde $\text{Im}(z_0) \neq 0$.

b) $|z - z_0| = |z + \bar{z}_0|$, onde $\text{Re}(z_0) \neq 0$.

c) $|z - z_0| = |z - \bar{z}_1|$, onde $z_0 \neq z_1$.

d) $\left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right| = c$, onde $z_0 \neq z_1$ e $c \neq 1$.

e) $\frac{\text{Re}(z)}{|z - 1|} > 1$ e $\text{Im}(z) < 3$.

f) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.

2. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Prove que,

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

b) $\left| z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right| + \left| z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2} \right| = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$.

3. Se $|z| = 2$, use a desigualdade triangular para verificar que

a) $|\text{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| \leq 7$.

b) $|z^4 - 4z^2 + 3| \geq 3$.

4. Prove que, se $|z| = 3$, então

$$\frac{5}{13} \leq \left| \frac{2z - 1}{4 + z^2} \right| \leq \frac{7}{5}.$$

5. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, tais que $\bar{z}w \neq 1$, $|z| \leq 1$ e $|w| \leq 1$. Prove que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| \leq 1.$$

Em qual caso a igualdade é válida?

6. Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ e $w_1, w_2, \dots, w_n$ números complexos. Prove que

$$\text{a) } \left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right) - \sum_{k < l} |z_k \overline{w_l} - z_l \overline{w_k}|^2.$$

$$\text{b) } \left| \sum_{k=1}^n z_k w_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right).$$

7. O que há de errado na seguinte expressão?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = -1.$$

8. Sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = Re^{i\varphi}$, onde $0 < r < R$. Mostre que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{w+z}{w-z} \right) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R \cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

9. Faça um esboço das seguintes regiões e determine se são abertas e conexas:

$$\text{a) } \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{3} \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{b) } \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+1| \}.$$

$$\text{c) } \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z-1| < \sqrt{2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z+1| < \sqrt{2} \right\}.$$

10. Mostre que:

a) Se $S_1, S_2, \dots, S_n$ são abertos em $\mathbb{C}$, então $\bigcap_{k=1}^n S_k$ é aberto em $\mathbb{C}$.

b) Se $\{S_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma família de conjuntos abertos em $\mathbb{C}$, onde Λ é um conjunto de índices qualquer, então $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$ é aberto em $\mathbb{C}$.

c) Se $\{S_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma família de conjuntos abertos em $\mathbb{C}$, então $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$ não necessariamente é aberto em $\mathbb{C}$.

11. Determine o domínio de definição de cada uma das seguintes funções:

a) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 3}$.

b) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z + \bar{z}}$.

c) $f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$.

12. Pede-se:

a) Escreva a função $f(z) = z^3 + 2z + 1$ na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

b) Suponha que $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$. Expresse $f(z)$ em termos de z .

13. Use a definição de limite para provar que:

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + 5) = z_0^2 + 5$

b) $\lim_{z \rightarrow 1-i} \bar{z}^2 = (1+i)^2$

c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$

14. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{z \rightarrow 2+3i} (z - 5i)^2$

b) $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 + 3}{iz}$

c) $\lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2 + 9}{z - 3i}$

d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}$

e) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{z^2 + z + 1 - i}$

15. Prove que:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^2$ não existe.

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$.

16. Mostre que se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ e existe $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0 , então $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$.

17. Calcule $\lim_{z \rightarrow 0} ze^{\frac{i}{|z|}}$.

18. Verifique se a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z - 1} & \text{se } |z| \neq 1 \\ 3 & \text{se } |z| = 1 \end{cases}$$

é contínua em $1, -1, i$ e $-i$.

19. Encontre $f'(z)$:

a) $f(z) = \frac{z - 1}{2z + 1}, z \neq -\frac{1}{2}$.

b) $f(z) = e^{z^3}$.

c) $f(z) = \frac{(1 + z^2)^4}{z^4}, z \neq 0$.

d) $f(z) = z^3 + z$.

20. Use a definição de derivada para encontrar $f'(z)$ quando:

a) $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$.

b) $f(z) = z^2 - z$.

21. Mostre que:

a) $f(z) = x - iy^2$ é diferenciável somente em $y = -\frac{1}{2}$ e $f'(z) = 1$.

b) $f(z) = x^2 + iy^2$ é diferenciável somente em $x = y$ e $f'(z) = 2x$.

c) $f(z) = yx + iy^2$ é diferenciável somente em $x = y = 0$ e $f'(z) = 0$.

d) $f(z) = x^3 + i(1 - y)^3$ é diferenciável somente em $x = 0, y = 1$ e $f'(z) = 0$.

22. Determine o conjunto de pontos no qual a função f é (i) diferenciável e (ii) analítica. Encontre f' onde existir.

a) $f(z) = (x^3 + 3xy^2 - 3x) + i(y^3 + 3x^2y - 3y).$

b) $f(z) = 6\bar{z}^2 - 2\bar{z} - 4i|z|^2$

c) $f(z) = (3x^2 + 2x - 3y^2 - 1) + i(6xy + 2y).$

d) $f(z) = \frac{2z^2 + 6}{z(z^2 + 4)}.$

e) $f(z) = e^{y^2 - x^2}(\cos(2xy) - i\sin(2xy)).$

23. Encontre a, b, c tais que a função $f(z) = (ay^3 + ix^3) + xy(bx + icy)$ seja analítica e determine $f'(z)$.

24. Mostre que não existe função analítica na forma $f = u + iv$ com $u = x^2 + y^2$.

25. Sejam $S \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Mostre que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2.$$

26. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2 & \text{se } z \neq 0 \\ z & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

a) Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para f em $z = 0$.

b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

27. Sejam f uma função analítica em z_0 , $w_0 = f(z_0)$ e $f'(z_0) \neq 0$. Mostre que existem V e W vizinhanças de z_0 e w_0 , respectivamente, tais que $f|_V$ é injetora e $f(V) = W$.

28. Usando a regra de L'Hôpital encontre os limites:

a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1}.$

b) $\lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^4 - 81}{z^2 + 9}.$

c) $\lim_{z \rightarrow 1+i\sqrt{3}} \frac{z^6 - 64}{z^3 + 8}.$

29. Mostre que se $f = u + iv$ é analítica numa região $S \subset \mathbb{C}$ e u é uma função constante, então f é constante.

30. Sejam $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f = 2h^3 + ih$, funções. Mostre que se f é uma função inteira, então h é constante.

31. Suponha que $f = u + iv$ é analítica num retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e satisfaz $u_x + v_y = 0$, para todo x e y . Mostre que existem $c \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{C}$ tais que $f(z) = -icz + d$.

32. Mostre que as funções:

a) $u(x, y) = e^{-x} \sin(y)$.

b) $v(x, y) = \cos(x) \cosh(y)$.

são harmônicas, e encontre a função analítica correspondente $u + iv$ em cada caso.

33. Mostre que se $f(x + iy) = Re^{i\phi}$ é analítica, então $\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \phi}{\partial y}$.

34. Considere os domínios $D_a = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < 1\}$ e $D_b = \{z \in \mathbb{C} : b < |z| < 1\}$. Defina $f : D_a \rightarrow D_b$ por

$$f(re^{i\theta}) = \left\{ \left(\frac{1-b}{1-a} \right) r + \frac{b-a}{1-a} \right\} e^{i\theta}.$$

Mostre que:

a) f é bijetora.

b) f é analítica se, e somente se, $a = b$.