Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística- IME-USP

2a. Avaliação de Introdução à Análise Complexa

Prof. Thiago Grando

28/06/2017

Nome : GABARITO

N^o USP :

Assinatura :

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Q1. (2,0) Verifique as seguintes identidades:

0,85 **a)** $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

0,85 **b)** $\cos h^{-1}(z) = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$, $z \in \mathbb{C}$.

0,3 **c)** Calcule $\cos h^{-1}\sqrt{5}$.

SOLUÇÃO :

a) Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} + \overbrace{\left(e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_1-z_2)}\right)}^{=0} + \overbrace{\left(e^{i(z_2-z_1)} - e^{i(z_2-z_1)}\right)}^{=0} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i}$$

$$= \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} + e^{iz_1} \cdot e^{-iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{4i} + \frac{e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{iz_1} \cdot e^{-iz_2} + e^{-iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}}{4i}$$

$$= \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i}\right) \cdot \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}\right)$$

$$= \operatorname{sen}(z_1) \cdot \cos(z_2) + \cos(z_1) \cdot \operatorname{sen}(z_2).$$

b) Se $w = \cosh^{-1}(z)$ então

$\cosh(w) = \cosh(\cosh^{-1}(z)) = z$. Assim,

$$z = \cosh(w) = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} \Rightarrow$$

$$2z = e^{w} + e^{-w} \quad (\times e^{w}) \Rightarrow$$

$$2z e^{w} = (e^{w})^{2} + 1 \Rightarrow$$

$$(e^{w})^{2} - 2z e^{w} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$e^{w} = \frac{2z + \sqrt{4z^{2} - 4}}{2} \Rightarrow$$

$$e^{w} = z + (z^{2} - 1)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\cosh^{-1}(z) = w = \log\left(z + (z^{2}-1)^{1/2}\right).$$

$4^{1/2} = (\pm 2, 0)$

c) $\cosh^{-1}(\sqrt{5}) = \log\left(\sqrt{5} + (4)^{1/2}\right)$

$= \log(\sqrt{5} \pm 2)$

Q2. (2,0)

0,6 **a)** Encontre a imagem de $\left\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3,\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 0\right\}$ através de $w = \frac{1}{z}$ e $w = \mathrm{Log}(z)$.

0,6 **b)** Mostre que enquanto o complexo z se desloca sobre o eixo real de -1 para 1, o ponto $w = \frac{1 - iz}{z - i}$ se desloca sobre parte do circulo unitário de centro $(0,0)$ de raio 1.

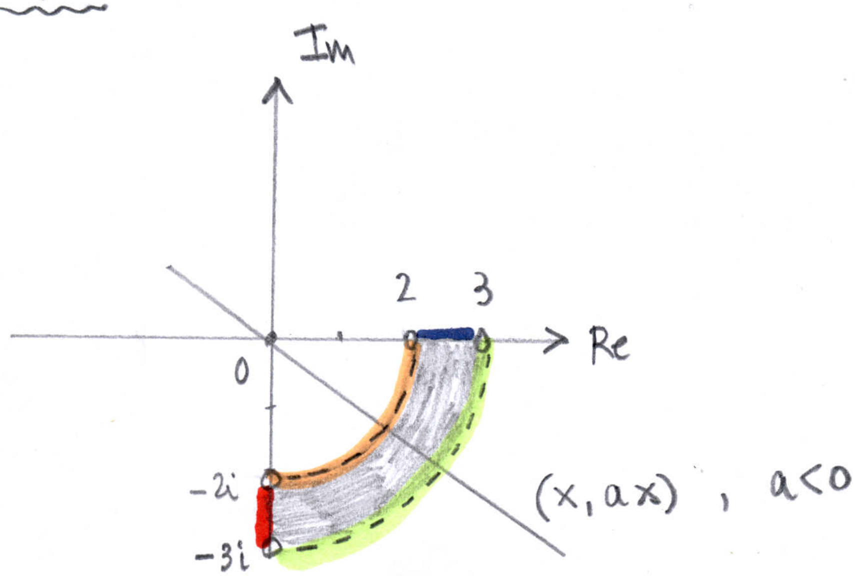
0,8 **c)** Mostre que, uma condição necessária e suficiente para que duas transformações de Möbius

$$T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{e} \quad T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

sejam identicas é que exista $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, tal que $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$ e $d_2 = \lambda d_1$.

SOLUÇÃO:

a)



• Se $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ tq $x = 0$ e $-3 < y < -2$, então

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{iy} = \frac{-i}{y} = \left(-\frac{1}{y}\right)\cdot i\,;$$

• Se $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ tq $y = 0$ e $2 < x < 3$, então

• Se $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 2$, então $|w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$;

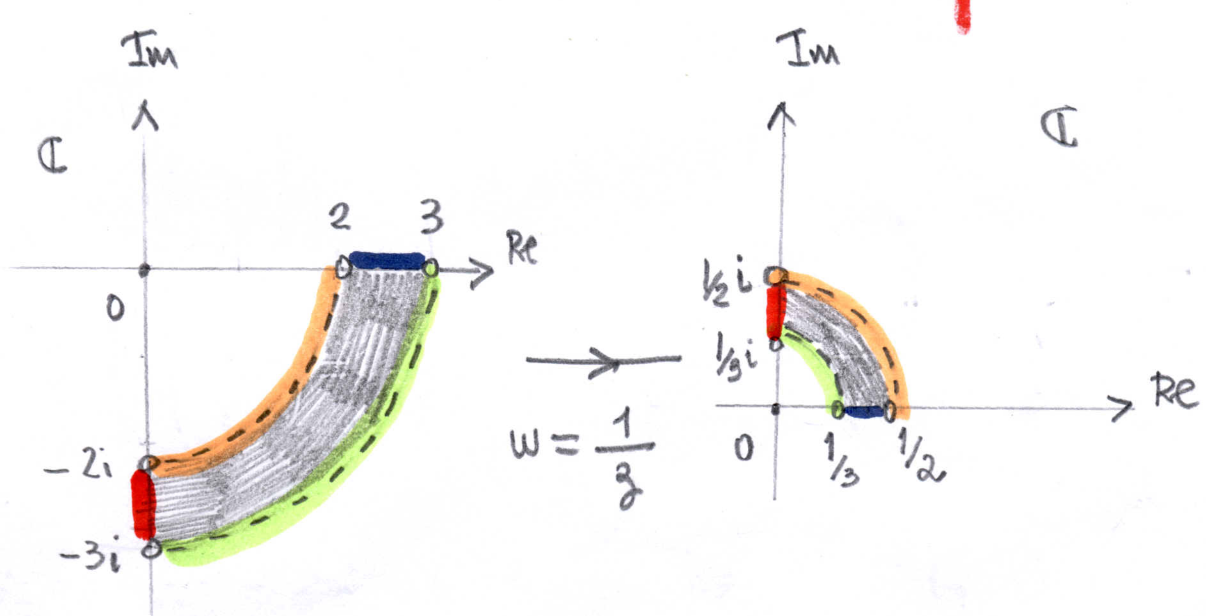
• Se $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 3$, então $|w| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{3}$;

• Se $z = (x, ax) \in \mathbb{C}$ com $a < 0$, $x > 0$ e $2 < |z| < 3$ então:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{(x, ax)} = \frac{(x, -ax)}{(x^2 + a^2x^2, 0)} = \left(\frac{x}{(1+a^2)x^2}, \frac{-ax}{(1+a^2)x^2}\right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{(1+a^2)x}}_{>0}, \underbrace{\frac{-a}{(1+a^2)x}}_{>0}\right) \in 1^\circ \text{ quadrante!}$$

Logo:



CONTINUAÇÃO 2-a:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2} \text{ e } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Verifiquemos agora a imagem do conjunto sobre $w = \text{Log}(z)$.

$$w = \text{Log}(z) = \ln|z| + i\,\text{Arg}(z)$$

- Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $x = 0$ e $-3 < y < -2$, então

$$w = \text{Log}(z) = \ln|y| + i\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

- Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $y = 0$, $2 < x < 3$, então

$$w = \text{Log}(z) = \ln|x| + i\,0;$$

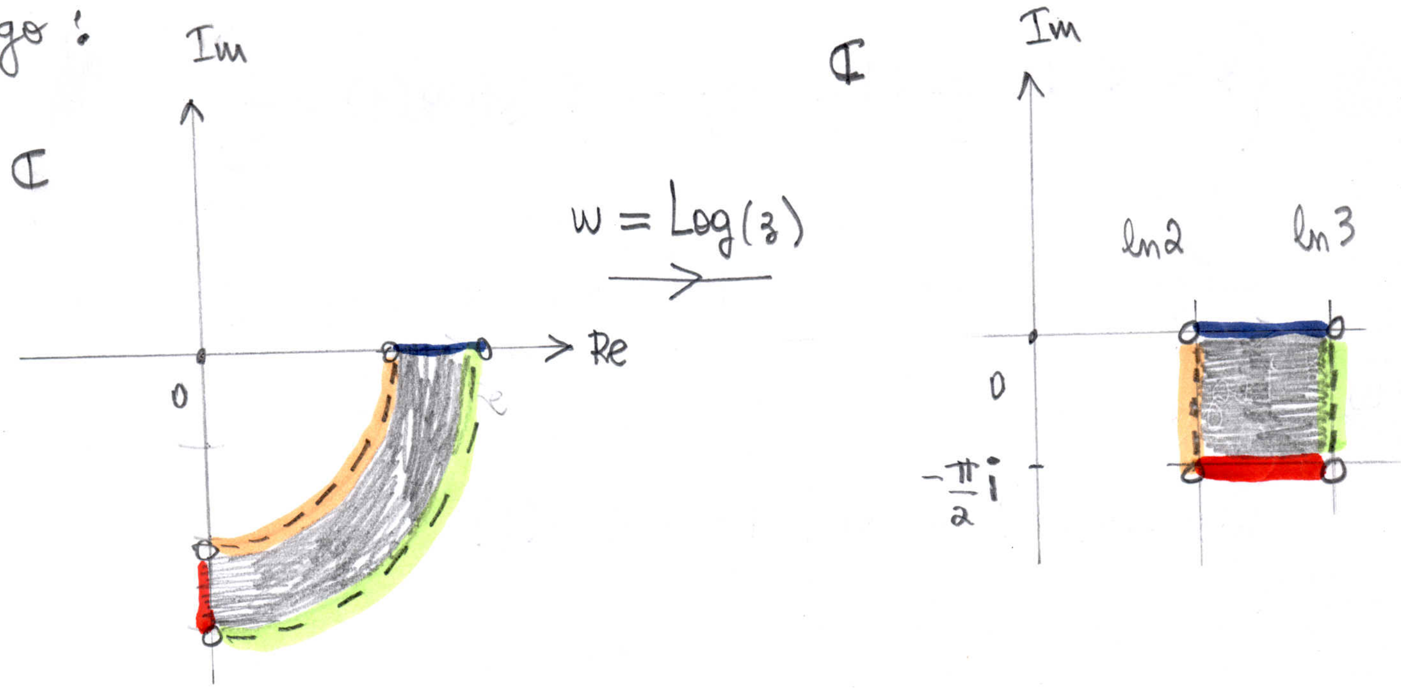
- Se $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 2$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 0$ então

$$w = \text{Log}(z) = \ln 2 + i\,\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 0;$$

- Se $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 3$ e $-\pi/2 \leq \arg(z) \leq 0$ então

$$w = \text{Log}(z) = \ln 3 + i\,\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 0.$$

Logo :



Logo a imagem através de $w = \mathrm{Log}(z)$ é o conjunto :

$$\left\{ z = (x, y) \in \mathbb{C} : \ln 2 < x < \ln 3 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0 \right\}.$$

b) Primeiro, vamos escrever $w(z) = u(z) + i\, v(z)$.

Seja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq i$. Logo,

$$w = \frac{1 - iz}{z - i} = \frac{(1,0) - (0,1)(x,y)}{(x,y) - (0,1)} = \frac{(1+y, -x)}{(x, y-1)} \cdot \frac{(x, 1-y)}{(x, 1-y)}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}}, \underbrace{\frac{1 - (x^2 + y^2)}{x^2 + (y-1)^2}} \right).$$

CONTINUAÇÃO 2-b:

Quando $y=0$, w é dado pela expressão:

$$w = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{1-x^2}{x^2+1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Afirmação: w transforma a reta $y=0$, na circunferência $\{ w \in \mathbb{C} : |w| = 1 \}$

Se $y=0$ então $w = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{1-x^2}{x^2+1} \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Logo, $$|w| = \sqrt{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2+1-2x^2+x^4}{(x^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(x^2+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}} = 1$$

Se:

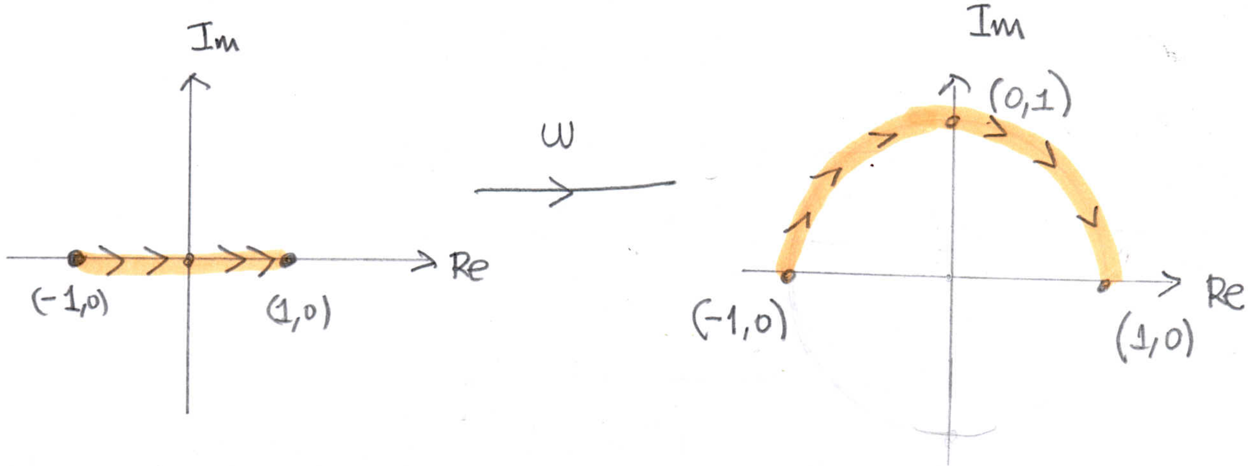
$x = -1$ então $w = \left(\dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1}, \dfrac{1-(-1)^2}{(-1)^2+1} \right)$

$= (-1, 0)$

$x = 0$ então $w = \left(\dfrac{2 \cdot 0}{0^2+1}, \dfrac{1-0^2}{0^2+1} \right) = (0, 1)$

$x = 1$ então $w = \left(\dfrac{2 \cdot 1}{1^2+1}, \dfrac{1-1^2}{1^2+1} \right)$

$= (1, 0)$



Como as coordenadas de w são funcões reais contínuas,

$w([-1,1]) = \{ w = u + iv \in \mathbb{C} : |w| = 1, -1 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1 \}$

c)

($\Longrightarrow$) se $T_1(z) = T_2(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, então

em particular $T_1(1) = T_2(1)$, $T_1(0) = T_2(0)$

e $T_1(\infty) = T_2(\infty)$. Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} = \dfrac{a_2 + b_2}{c_2 + d_2} \quad (\mathrm{I}) \\ \quad e \\ \dfrac{b_1}{d_1} = \dfrac{b_2}{d_2} \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

. Usando que $\infty = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z}$,

temos, $$\frac{a_1 \cdot \infty + b_1}{c_1 \cdot \infty + d_1} = \frac{a_2 \cdot \infty + b_2}{c_2 \cdot \infty + d_2} \Longrightarrow$$

$$\frac{a_1 \cdot \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} + b_1}{c_1 \cdot \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} + d_1} = \frac{a_2 \cdot \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} + b_2}{c_2 \cdot \lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} + d_2} \Longrightarrow$$

$$\frac{\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{a_1}{z} + b_1 \right)}{\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{c_1}{z} + d_1 \right)} = \frac{\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{a_2}{z} + b_2 \right)}{\lim\limits_{z \to 0} \left(\frac{c_2}{z} + d_2 \right)} \Longrightarrow$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\frac{a_1+b_1 z}{\cancel{z}}}{\frac{c_1+d_1 z}{\cancel{z}}}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\frac{a_2+b_2 z}{\cancel{z}}}{\frac{c_2+d_2 z}{\cancel{z}}}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} \quad (\mathrm{III}).$$

Fazendo $\dfrac{b_1}{d_1} = \dfrac{b_2}{d_2} := \alpha$ e $\dfrac{a_1}{c_1} = \dfrac{a_2}{c_2} := \beta$,

temos $\begin{cases} b_1 = \alpha d_1 \\ b_2 = \alpha d_2 \end{cases}$ e $\begin{matrix} a_1 = \beta c_1 \\ a_2 = \beta c_2 \end{matrix}$. Substituindo em (I):

$$\frac{\beta c_1 + \alpha d_1}{c_1 + d_1} = \frac{\beta c_2 + \alpha d_2}{c_2 + d_2} \Rightarrow$$

$$(\beta c_1 + \alpha d_1)(c_2 + d_2) = (\beta c_2 + \alpha d_2)(c_1 + d_1) \Rightarrow$$

$$\cancel{\beta c_1 c_2} + \beta c_1 d_2 + \alpha d_1 c_2 + \cancel{\alpha d_1 d_2} =$$
$$\cancel{\beta c_2 c_1} + \beta c_2 d_1 + \alpha d_2 c_1 + \cancel{\alpha d_2 d_1} \Rightarrow$$

$$(\beta - \alpha) c_2 d_1 + (\alpha - \beta) c_1 d_2 = 0 \Rightarrow$$

CONTINUAÇÃO $\alpha - \beta$

$$(\alpha - \beta)(c_1 d_2 - c_2 d_1) = 0$$

Agora $\alpha - \beta \neq 0$, pois se $\alpha - \beta = 0$, então $\alpha = \beta$, e daí $\dfrac{b_1}{d_1} = \alpha = \beta = \dfrac{a_1}{c_1}$, ou seja,

$a d_1 - b_1 c_1 = 0$, que contradiz o fato de T_1 ser aplicação de Möbius. Disso, $c_1 d_2 - c_2 d_1 = 0$, ou seja, $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{d_2}{d_1} := \lambda$. Observe que $\lambda \neq 0$, pois se $\lambda = 0$, então $c_2 = d_2 = 0$ e isso não ocorre pois torna o denominador de T_2 nulo!

Assim, apresentamos $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} c_2 = \lambda c_1 \\ d_2 = \lambda d_1 \end{cases}$$

e

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} \Rightarrow \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{\lambda c_1} \Rightarrow a_2 = \lambda a_1$$

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{d_2} \Rightarrow \frac{b_1}{d_1} = \frac{b_2}{\lambda d_1} \Rightarrow b_2 = \lambda b_1 .$$

$(\Leftarrow)$ Se $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ tal que $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$ e $d_2 = \lambda d_1$, então

$$T_1(z) = \frac{\frac{a_2}{\lambda} z + \frac{b_2}{\lambda}}{\frac{c_2}{\lambda} z + \frac{d_2}{\lambda}} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = T_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Portanto T_1 e T_2 são identicas.

Q3. (2,0)

0,8

a) Seja $f(z) = y - x - 3ix^2$ e γ a curva dada pelo segmento de reta com extremos em $z = 0$ e $z = 1 + i$. Mostre que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 1 - i$.

b) Mostre que se m e n são inteiros, então

0,6

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m \neq n \\ 2\pi & \text{se} \quad m = n. \end{cases}$$

Com isso, conclua que

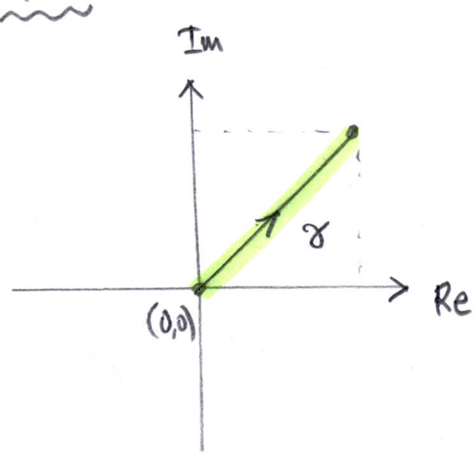
0,6

$$\int_\gamma z^m \overline{z}^n dz = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m - n + 1 \neq 0 \\ 2\pi i & \text{se} \quad m - n + 1 = 0. \end{cases}$$

onde γ é a circunferência dada por $z(t) = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUÇÃO :

a)



γ é imagem da função contínua $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $z(t) = (t,t)$. Logo, $z'(t) = (1,1)$ $\forall\, t \in [0,1]$. Por isso γ é uma curva suave. A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = (y-x, -3x^2)$ onde $z = (x,y)$ é contínua pois suas coordenadas são contínuas. Então a integral de f sobre γ é:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (0, -3t^2) \cdot (1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 3t^2 dt + i \int_0^1 (-3t^2)\,dt = 1 - i$$

b) Se $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, então $m-n \neq 0$, logo,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} \cdot e^{-in\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos(m-n)\theta, \operatorname{sen}(m-n)\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(m-n)\theta\, d\theta + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m-n)\theta\, d\theta = \frac{1}{m-n} \left\{ \operatorname{sen}(m-n)\theta \Big|_0^{2\pi} - i \cos(m-n)\theta \Big|_0^{2\pi} \right\}$$

$$= 0$$

Se $m = n$, então $\int_0^{2\pi} e^{i\theta \cdot 0} d\theta = \int_0^{2\pi} (1,0)\, d\theta = 2\pi$.

γ é dada por $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Foi verificado em sala que γ é uma curva suave. Chame $g(z) = z^m \cdot \bar{z}^n$. g é produto de funções contínuas, logo contínua. Portanto $\exists$ a integral de g sobre γ e:

$$\int_\gamma g(z)\, dz = \int_0^{2\pi} g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Logo:

Se $m - n + 1 = 0$, então

$$\int_\gamma z^m \bar{z}^n dz = \int_0^{2\pi} e^{imt} \cdot e^{-int} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{it(m-n+1)} dt = i\, 2\pi$$

Se $m - n + 1 \neq 0$, então $\int_\gamma z^m \bar{z}^n dz = 0$.

Q4. (2,0)

0,8 a) Seja γ a circunferência $|z| = 2$. Mostre que $\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{4\pi}{3}$.

1,2 b) Seja γ_R a circunferência $|z| = R$ descrita no sentido anti-horário, onde $R > 2$. Suponha que $\text{Log}(z)$ é o ramo principal da função logarítmica. Mostre que

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\text{Log}(z^2)}{z^2+z+1}dz\right| \le 2\pi R\left(\frac{\pi + 2\text{Log}(R)}{R^2-R-1}\right).$$

SOLUÇÃO

a) $|z^2-1| \geq ||z^2|-1| = |4-1| = 3$ Logo

$\frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{1}{3} := M$. É imediato verificar que

$L(\gamma) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$. Com isso,

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}\right| \leq M \cdot L = \frac{1}{3} 4\pi = \frac{4\pi}{3}$$

b) Foi verificado em sala que γ é curva suave e que $L(\gamma) = 2\pi R$. Agora,

$$|z+1| \leq |z|+1 = R+1 \Rightarrow -|z+1| \geq -R-1,$$

logo, $|z^2+z+1| \geq ||z^2|-|z+1|| \geq |R^2-R-1| \overset{R>2}{=} R^2-R-1$

com isso, $\frac{1}{|z^2+z+1|} \leq \frac{1}{R^2-R-1}$. Assim,

$$\left|\frac{\mathrm{Log}(z^2)}{z^2+z+1}\right| = \frac{|\mathrm{Log}(z^2)|}{|z^2+z+1|} \leq \frac{|\ln|z^2| + i\,\mathrm{Arg}(z^2)|}{R^2-R-1}$$

$$\leq \frac{\overbrace{|\ln R^2|}^{>0 \text{ pq } R>2.} + |\overbrace{\mathrm{Arg}(z^2)}^{\in(-\pi,\pi]}|}{R^2-R-1} \leq \frac{2\ln R + \pi}{R^2-R-1} := M.$$

Por isso,

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{Log}(z^2)}{z^2+z+1}\,dz\right| \leq L\cdot M = 2\pi R\cdot\left(\frac{\pi + 2\ln R}{R^2-R-1}\right).$$

Q5. (2,0) Seja $f(z)$ uma função contínua sobre a região $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$, e suponha que $\lim_{z \to \infty} z f(z) = A$ exista. Considere $\alpha \in (0, 2\pi]$ um número real fixo. Denote por γ_R o arco circular dado pela equação paramétrica $z(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ com $R \geq 1$. Pede-se:

0,2

a) Mostre que γ_R é uma curva suave.

b) Verifique que $\int_{\gamma_R} f(z)dz = i \int_0^{\alpha} R.e^{i\theta} f(R.e^{i\theta})d\theta$ e $i \int_0^{\alpha} A d\theta = iA\alpha$. Conclua que

0,6

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz - iA\alpha \right| \leq \int_0^{\alpha} \left| R.e^{i\theta} f(R.e^{i\theta}) - A \right| d\theta.$$

1,2

c) Usando que $\lim_{z \to \infty} z f(z) = A$ existe e o ítem **b)**, mostre que $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = iA\alpha$.

SOLUÇÃO :

a) Imediato!

b) $z'(\theta) = iRe^{i\theta}$, $\forall\ \theta \in [0, \alpha]$, $R \geq 1$.

Como f é contínua em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ então

$$\exists \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^{\alpha} f(z(\theta)) \cdot z'(\theta)\,d\theta = \int_0^{\alpha} f(Re^{i\theta}) \cdot iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i \int_0^{\alpha} Re^{i\theta} \cdot f(Re^{i\theta})\,d\theta$$

$$i \int_0^{\alpha} A\,d\theta = iA(\alpha - 0) = iA\alpha.$$

Por isso,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz - iA\alpha\right| = \left| i\int_0^\alpha Re^{i\theta} f(Re^{i\theta})\,d\theta - i\int_0^\alpha A\,d\theta\right|$$

$$= \left| i\int_0^\alpha \left(Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) - A\right) d\theta\right|$$

$$= \left| \int_0^\alpha \left(Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) - A\right) d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^\alpha \left|Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) - A\right| d\theta$$

c) Como $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = A < \infty$, então $\forall\, \varepsilon > 0$,

$\exists\, M > 0$ tq $\forall\, |z| \geq M$,

$$\left|Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \forall\, \theta \in [0,\alpha]$$

Assim,

$$\int_0^\alpha \left|Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) - A\right| d\theta < \int_0^\alpha \frac{\varepsilon}{\alpha}\,d\theta = \frac{\varepsilon}{\alpha}(\alpha - 0) = \varepsilon$$

$\geq$ (letra b)

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz - iA\alpha\right|.$$

Portanto, $\lim \int f(z)\,dz = iA\alpha$.