Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística- IME-USP

1a. Avaliação de Introdução à Análise Complexa

Prof. Thiago Grando

02/05/2017

Nome : GABARITO

N^o USP :

Assinatura :

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Q1. (2,0) Pede-se:

a) Encontre todos os valores de $(-i)^{1/3}$. Esboce as raízes no plano de Argand-Gauss.

b) Sejam $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$ e $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 1$ fixos. Descreva o conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z - z_0}{z - z_1}\right| = c\right\}$.

c) Mostre que o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$, é aberto, não-limitado e conexo. Esboce o conjunto S no plano de Argand-Gauss.

SOLUÇÃO:

a) $|-i| = 1$, logo $-i = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Assim,

$$(-i)^{1/3} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right),$$

onde $k = 0, 1, 2$.

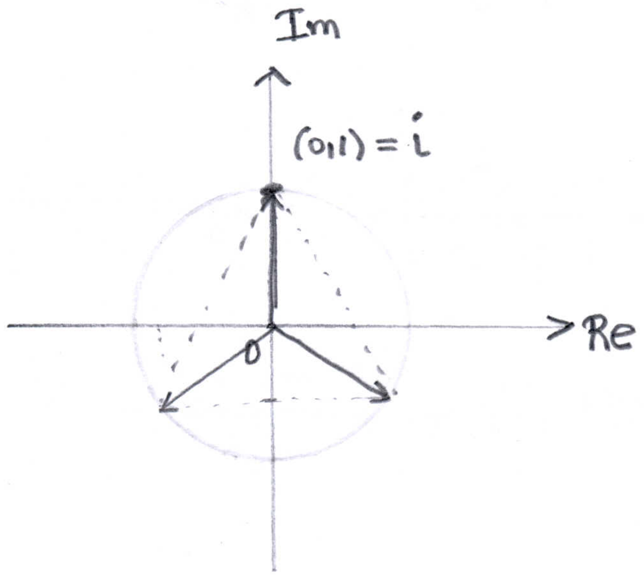
$$k=0 \rightarrow \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right), \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$$k=1 \rightarrow \left(\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/2 + 2\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0,1)$$

$$k=2 \rightarrow \left(\cos\left(\frac{-\pi/2 + 4\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/2 + 4\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

CONTINUAÇÃO 1-a:



b) Se $z = (x,y) \in \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right| = c \right\}$ então

$\left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right| = c$. Represente $z_0 = (x_0, y_0)$ e $z_1 = (x_1, y_1)$.

Se $c = 0$, então $\frac{|z - z_0|}{|z - z_1|} = 0$, ou seja $|z - z_0| = 0$.

Nesse caso $z - z_0 = 0$, portanto $z = z_0$. É claro que c não pode ser negativo. Suponha que $c > 0$ e $c \neq 1$. Logo,

$$|z - z_0| = c\,|z - z_1| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{c^2\left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right)} \Rightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2\left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right) \Rightarrow$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 =$$
$$c^2\left(x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2\right) \Rightarrow$$

$$x^2 - c^2x^2 - 2xx_0 + c^2 2xx_1 + y^2 - c^2y^2 - 2yy_0 + 2yy_1 = c^2x_1^2 + c^2y_1^2 - (x_0^2+y_0^2)$$

$\Rightarrow$

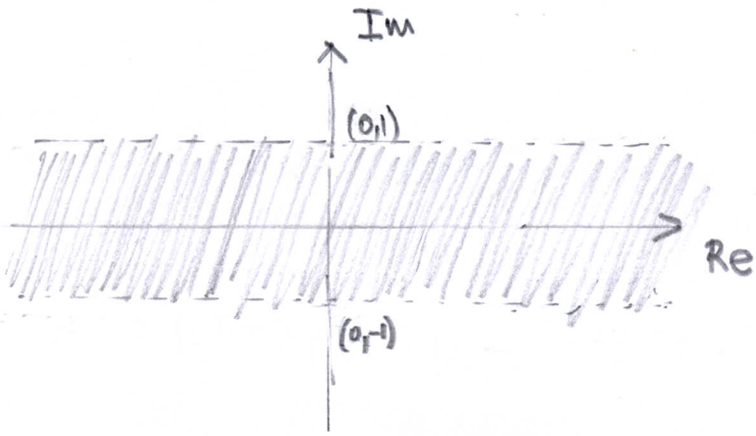
$$(1-c^2)\left\{x^2 - 2x\left(\frac{x_0 - c^2x_1}{1-c^2}\right) + \left(\frac{x_0 - c^2x_1}{1-c^2}\right)^2 + y^2 - 2y\left(\frac{y_0 - c^2y_1}{1-c^2}\right) + \left(\frac{y_0 - c^2y_1}{1-c^2}\right)^2\right\}$$

$$= c^2x_1^2 + c^2y_1^2 - (x_0^2+y_0^2) + \frac{(x_0 - c^2x_1)^2}{1-c^2} + \frac{(y_0 - c^2y_1)^2}{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\left(x - \left(\frac{x_0 - c^2x_1}{1-c^2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{y_0 - c^2y_1}{1-c^2}\right)\right)^2 = \frac{c^2}{(1-c^2)^2}\left((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2\right)$$

Portanto, o conjunto acima é uma circunferência centrada em $\left(\frac{x_0 - c^2x_1}{1-c^2}, \frac{y_0 - c^2y_1}{1-c^2}\right)$ de raio $\frac{c}{1-c^2}\cdot|z_1 - z_0|$.

c) $S = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < 1\}$



1°: S é um aberto de $\mathbb{C}$:

Vamos mostrar que $S = \mathrm{Int}(S)$. Ou seja, vamos

CONTINUAÇÃO 1-C:

mostrar que todos os pontos de S são pontos interiores.

Seja $z_0 \in S$ cuja representação polar é dada por:

$$z_0 = r_0 (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0), \quad r_0 \geqslant 0 \quad \theta_0 \in [0, 2\pi).$$

Defina a vizinhança V de z_0 por:

$$V = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 1 - |r_0 \operatorname{sen}\theta_0| \}$$

Afirmo que $V \subset S$: Seja $z \in V$, $z = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ para algum $r \geqslant 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Então:

$$|z - z_0| < 1 - |r_0 \operatorname{sen}\theta_0|. \qquad (1)$$

Mas,

$$z - z_0 = (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0, \underbrace{r\operatorname{sen}\theta - r_0\operatorname{sen}\theta_0}_{Im(z - z_0)}),$$

logo

$$\begin{aligned} |z - z_0| \geqslant |Im(z - z_0)| &= |r\operatorname{sen}\theta - r_0\operatorname{sen}\theta_0| \\ &\geqslant \big||r\operatorname{sen}\theta| - |r_0\operatorname{sen}\theta_0|\big| \\ &\geqslant |r\operatorname{sen}\theta| - |r_0\operatorname{sen}\theta_0|. \qquad (2) \end{aligned}$$

Por isso,

$$|r \operatorname{sen}\theta| - |r_0 \operatorname{sen}\theta_0| \overset{(2)}{\leq} |z - z_0| \overset{(1)}{<} 1 - |r_0 \operatorname{sen}\theta_0| \implies$$

$$\underbrace{|r \operatorname{sen}\theta|}_{Im(z)} < 1 - |r_0 \operatorname{sen}\theta_0| + |r_0 \operatorname{sen}\theta_0| = 1 \Rightarrow$$

$|Im(z)| < 1$. Portanto $z \in S$.

Ou seja $V \subset S$. Logo $S = Int(S)$.

2°: S é não-limitado: Dado $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ seja $z = (M+1, b)$ onde $|b| < 1$. Logo $z \in S$. No entanto, $|z| = \sqrt{(M+1)^2 + b^2} > M$. Como $M > 0$ é qualquer, concluímos que $\forall M > 0$, $\exists z \in S$ tal que $z \notin B(0, M)$. Portanto S é não-limitado.

3°: S é conexo: Para quaisquer $z_1, z_2 \in S$ vamos construir uma poligonal inteiramente contida em S. Se $z_1 = (x_1, y_1)$; $z_2 = (x_2, y_2) \in S$, então $|y_1| < 1$ e $|y_2| < 1$. Considere o segmento de reta que liga z_1 a z_2:

CONTINUAÇÃO 1-c :

$$z = t z_1 + (1-t) z_2 \quad , \quad t \in [0,1]. \qquad (*)$$

Se w é um ponto qualquer deste segmento, então $\exists\, t_0 \in [0,1]$ tal que $w = t_0 z_1 + (1-t_0) z_2$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} w &= t_0 z_1 + (1-t_0) z_2 \\ &= t_0 (x_1, y_1) + (1-t_0)(x_2, y_2) \\ &= (\underbrace{t_0 x_1 + (1-t_0) x_2}_{Re(w)}, \underbrace{t_0 y_1 + (1-t_0) y_2}_{Im(w)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Im(w)| &= |t_0 y_1 + (1-t_0) y_2| \\ &\leq t_0 |y_1| + (1-t_0)|y_2| \\ &< t_0 \cdot 1 + (1-t_0) \cdot 1 \\ &= t_0 + 1 - t_0 = 1 \end{aligned}$$

Por isso $w \in S$. Ou seja todo segmento de reta $(*)$ está contido em S. Dessa forma S é convexo.

Q2. (2,0)Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ constantes e n um inteiro positivo. O objetivo dessa questão é provar que todas as raízes da equação

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a+ib \tag{1}$$

são reais se, e somente se, $a^2+b^2=1$. Para isso:

a) Sendo $z = x$ uma raiz real de (1), mostre que $|a+ib|^2 = 1$.

b) Sendo $z = x+iy$ uma raiz de (1) e $a^2+b^2=1$, mostre que $(1+y)^2+x^2 = (1-y)^2+x^2$. Ou seja, $y = 0$.

SOLUÇÃO:

a) Se $z = x$ é raiz real de (1), então

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = a+ib.$$

Logo,

$$|a+ib|^2 = \left|\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n\right|^2 = \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|^{2n} = \left(\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|^2\right)^n =$$

$$= \left(\frac{|1+ix|^2}{|1-ix|^2}\right)^n = \left(\frac{(1+ix)\cdot\overline{(1+ix)}}{(1-ix)\cdot\overline{(1-ix)}}\right)^n = \left(\frac{\cancel{(1+ix)}\cancel{(1-ix)}}{\cancel{(1-ix)}\cancel{(1+ix)}}\right)^n = 1,$$

Logo $|a+ib|^2 = 1$. Ou seja, $a^2+b^2 = |a+ib|^2 = 1$.

b) Se $z = x+iy$ é raiz de (1) e $a^2+b^2 = 1$, então:

CONTINUAÇÃO 2-b:

$$a + ib = \left(\frac{1 + i(x+iy)}{1 - i(x+iy)}\right)^n = \left(\frac{(1-y) + ix}{(1+y) - ix}\right)^n.$$

Logo,

$$1 = a^2 + b^2 = |a+ib| = \left|\left(\frac{(1-y)+ix}{(1+y)-ix}\right)^n\right|$$

$$= \left|\frac{(1-y)+ix}{(1+y)-ix}\right|^n.$$

Ou seja, $\left|\frac{(1-y)+ix}{(1+y)-ix}\right| = 1.$ Assim,

$$|(1-y)+ix| = |(1+y)-ix| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(1-y)^2 + x^2} = \sqrt{(1+y)^2 + (-x)^2} \Rightarrow$$

$$(1-y)^2 + \cancel{x^2} = (1+y)^2 + \cancel{x^2} \Rightarrow$$

$$1 - 2y + y^2 = 1 + 2y + y^2 \Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Logo $z = x + iy = x$. Ou seja z é real.

Q3. (2,0) Pede-se:

a) Usando a definição de limite, $\lim_{z\to z_0}(z^2+1) = z_0^2+1$.

b) Calcule $\lim_{z\to 3i}\dfrac{z^2+9}{z-3i}$.

c) Mostre que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, então $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = |w_0|$.

SOLUÇÃO:

a) Dado $\varepsilon > 0$, defina $\delta = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{1+2|z_0|}, 1\right\}$.

Se $0 < |z-z_0| < \delta$ então

$$
\begin{aligned}
|z^2+1-(z_0^2+1)| &= |z^2-z_0^2| \\
&= |(z-z_0)(z+z_0)| \\
&= |z-z_0||z+z_0| \\
&= |z-z_0||z-z_0+z_0+z_0| \\
&\leq |z-z_0|(|z-z_0|+2|z_0|) \\
&< |z-z_0|(1+2|z_0|) \\
&< \frac{\varepsilon}{1+2|z_0|}\cdot(1+2|z_0|) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

b) $$\lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i} = \lim_{z\to 3i}\frac{\cancel{(z-3i)}(z+3i)}{\cancel{(z-3i)}} = \lim_{z\to 3i} z+3i = 6i$$

c) Como $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$

tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Usando uma desigualdade triangular, temos:

$$\big|\, |f(z)| - |w_0| \,\big| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Portanto $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

Q4. (2,0) Pede-se:

a) Determine o conjunto de pontos no qual a função $f(z) = \dfrac{2z^2+6}{z(z^2+4)}$ é (i) diferenciável e (ii) analítica. Encontre f' onde existir.

b) Sejam $S \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : S \to \mathbb{C}$ analítica. Mostre que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4\,|f'(z)|^2 \,.$$

SOLUÇÃO:

a)

$$f'(z) = \frac{z(z^2+4)(2z^2+6)' - (2z^2+6)(z(z^2+4))'}{(z(z^2+4))^2}$$

$$= \frac{z(z^2+4)(4z) - (2z^2+6)(3z^2+4)}{z^2(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{(z^3+4z)(4z) - (6z^4+8z^2+18z^2+24)}{z^2(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{-2z^4-10z^2-24}{z^2(z^2+4)^2} = \frac{-2(z^4+5z^2+12)}{z^2(z^2+4)^2}$$

Logo é diferenciável e analítica $\forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0, \pm 2i\}$.

b) Como $f = u + iv$ é analítica em S, então são válidas as equações de Cauchy – Riemann para u, v em S, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\forall z \in S$. Assim,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2 + v^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2)}_{(I)} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^2)}_{(II)} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2)}_{III} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2)}_{(IV)} \quad (*)$$

(I): $\frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u^2)\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

(II): $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^2) = 2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

(III): $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

(IV): $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2) = 2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

CONTINUAÇÃO 4-b :

Usando as relações de Cauchy-Riemann, temos:

$$(\mathrm{I}): \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) = 2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cancel{2u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

$$(\mathrm{II}): \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v^2) = 2\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cancel{2v\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

$$(\mathrm{III}): \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2) = 2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \cancel{2u\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

$$(\mathrm{IV}): \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v^2) = 2\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \cancel{2v\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

Assim:

$$(*) = 2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

$$= 4\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) = 4\,|f'(z)|.$$

Q5. (2,0) Seja $f : S \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0. \end{cases}$$

a) Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para f em $z = 0$.

b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

SOLUÇÃO:

a) Note que f pode ser escrita como:

$$f(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}\right) + i\left(\dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}\right), & \text{se } z = (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } z = (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Chamando $u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e

$$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$ Vamos calcular:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(0+\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, 0+\Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(0+\Delta x, 0) - v(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(0, 0+\Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 1$$

Logo as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para f quando $z=0$.

b) Foi verificado em sala que $f'(0)$ não existe.