



BONS ESTUDOS!

1. SUPERFÍCIES DE NÍVEL, PLANOS TANGENTES E DERIVADAS DIRECIONAIS

EXERCÍCIOS

1.1. Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

- a. $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$ b. $F(x, y, z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$
c. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$ d. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$
e. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$ f. $F(x, y, z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$
g. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ e $c = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

1.2. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

1.3. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

1.4. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

1.5. Ache a reta tangente à interseção do gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

1.6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1)$ na imagem de γ , determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

1.7. Determine a equação da esfera que tangencia a superfície $(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} - (z - 1)^2 = 0$ nos pontos $(2, 2, 2)$ e $(2, 2, 0)$.

1.8. Suponha que sobre um certo aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ o potencial elétrico $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

- a. Ache a taxa de variação do potencial em $P = (3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
b. Qual a direção e sentido em que a taxa do potencial elétrico, em P , é a maior possível? E a menor possível?
c. Qual o valor dessa taxa máxima?

2. CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS EM ABERTOS DE \mathbb{R}^2

EXERCÍCIOS

2.1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

- a. $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ b. $z = x^2y^2$
c. $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ d. $z = x^3y^3$
e. $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ f. $z = xye^{-x^2-y^2}$

- 2.2. Determine os valores de a para os quais a função $f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$
- tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
 - tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
 - Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
 - Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?
-

3. MÁXIMOS E MÍNIMOS EM CONJUNTOS COMPACTOS

EXERCÍCIOS

- 3.1. Esboce a região D e determine o máximo e o mínimo absolutos da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ quando
- $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$ e D é o triângulo (com interior e lados inclusos) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$;
 - $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$;
 - $f(x, y) = xy$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$;
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \in [0, \frac{1}{4}], y \geq 0\}$.
- Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver os itens (c) e (d)?
- 3.2. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
- $f(x, y) = xy$, sujeito a $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$;
 - $f(x, y, z) = xyz$, sujeito a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$;
 - $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- 3.3. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f na região R sendo
- $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$;
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 4 \text{ e } x, y, z \geq 0\}$.
- 3.4. Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C , sem parametrizar C , quando
- $f(x, y) = x^3y$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$;
 - $f(x, y, z) = x - z$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$;
 - $f(x, y, z) = x + y + z$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$;
 - $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x + y + z = 1\}$.
- Resolva também os itens **a.** e **b.** acima parametrizando C .
- 3.5. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = 2x + y - z^2$ no compacto C .
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$;
 - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$;
- 3.6. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Determine o máximo e o mínimo de f em:
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$;
 - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq x + y\}$.
-

4. MÁXIMOS E MÍNIMOS EM CONJUNTOS ARBITRÁRIOS

CADA UM DOS PROBLEMAS ABAIXO TEM SOLUÇÃO. JUSTIFIQUE SUA A EXISTÊNCIA E, EM SEGUIDA, DETERMINE-A.

EXERCÍCIOS

- 4.1. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
- 4.2. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
- 4.3. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
- 4.4. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.
-

- 4.5. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.
- 4.6. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2, z > 0$.
- 4.7. Um pentágono com 12cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.
- 4.8. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
- 4.9. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.
- 4.10. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.
- 4.11. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

5. MÁXIMOS E MÍNIMOS - CÁLCULO 1 × CÁLCULO 2

EXERCÍCIOS

- 5.1. É impossível para uma função contínua de \mathbb{R} em \mathbb{R} ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.
- 5.2. Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2(1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.
- 5.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes não todas nulas. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f , então será um extremante global de f .

Dica. Dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.

6. APLICAÇÕES (SÓ DEPOIS DE FAZER TUDO, OK?)

EXERCÍCIOS

- 6.1. (**Método dos Mínimos Quadrados**). Fixado $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, com $1 \leq i \leq n$, tais que $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i, 1 \leq i \leq n$, é, em geral, impossível se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, no sentido de minimizar o erro quadrático médio, dado por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

6.2. (Modelagem de Portfólios). Aqui daremos um roteiro para a solução de dois problemas relacionados a investimento. Suponha que um investidor tem n opções de ativos e pode escolher livremente um percentual de seu capital para aplicar em cada um deles. Tal escolha é chamada de um *portfólio*. O modelo assume que o investidor é averso a riscos, ou seja, entre dois ativos com um mesmo retorno médio ele vai preferir sempre o de menor risco.

O valores de retorno médio (r_i) e risco/volatilidade/desvio padrão (σ_i) de cada ativo são tipicamente obtidos a partir de sua série histórica. Por comodidade escrevemos os vetores $r = (r_1, \dots, r_n)$ e $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Se denotamos por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ o vetor (de pesos) tal que ω_i é o percentual de capital que o investidor aplica no i -ésimo ativo, temos que o retorno esperado desse portfólio é $R_p(\omega) = \langle \omega, r \rangle$.

Além disso, se $\rho = (\rho_{ij})$ é matriz de correlação entre os retornos dos ativos, temos que a variância do retorno deste portfólio é $\sigma_p = \left(\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$.

As perguntas naturais que surgem são:

(i) Fixado um risco σ_p determine ω tal que $R_p(\omega)$ seja máximo.

(ii) Fixado um retorno R_p determine ω tal que $\sigma_p(\omega)$ seja mínimo.

Ambas as perguntas podem ser reformuladas como problemas de máximos ou mínimos condicionados, já que as coordenadas de ω devem satisfazer $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ (um hiperplano em \mathbb{R}^n) e temos que R_p ou σ_p é constante. Assim os problemas acima se reescrevem como

(i) Dado um risco $\sigma_p > 0$ arbitrário,

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && R_p(\omega) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ &&& \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ &&& \left(\sum_{i,j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_p. \end{aligned}$$

(ii) Dado um retorno R_p ,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \sigma_p(\omega) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \\ &&& \omega_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ &&& \langle \omega, r \rangle = R_p. \end{aligned}$$

Explicita as condições de Lagrange que um ponto crítico deve satisfazer. O conjunto dos pares (σ_p, R_p) para os quais o problema admite solução determina uma hipérbole, chamada *Markowitz bullet*. Você consegue determinar uma expressão para essa hipérbole?

RESPOSTAS

1.1 Apenas a superfície do item a..

1.2 $\pm(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

1.5 $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

1.6 $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.

1.7 $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 2$

1.8 a. $\frac{32}{\sqrt{3}}$; b. $(38, 6, 12)$; c. $2\sqrt{406}$.

2.1 a. ponto de mín: $(-3, 2)$;

b. pontos de mín: $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;

c. ponto de mín: $(\frac{1}{3}, 0)$;

d. pontos de sela: $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;

e. pontos de sela: $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$, ponto de máx: $(1, 1)$;

- f. pontos de mín: $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
 ponto de sela: $(0,0)$, pontos de
 máx: $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- 2.2 a. $a > 0$; b. $a < 0$; c. não existe;
 d. $a = 0$.
- 3.1 a. valor mín: $f(4,0) = -7$, valor
 máx: $f(4,5) = 13$;
 b. valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$,
 valor máx: $f(x,0) = f(0,y) = 0$,
 com $x \in [-\sqrt{2}, 0]$ e $y \in [0, \sqrt{2}]$;
 c. valor mín: $f(2, -\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$,
 valor máx: $f(2, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$;
 d. valor mín: $f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) = \frac{1}{32} +$
 $(\frac{15}{16})^2$, valor máx: $f(0,1) = 1$.
- 3.2 a. valor mín: -16 , valor máx: 4 ;
 b. valor mín: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, valor máx: $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
 c. valor mín: 0 , valor máx: $\frac{1}{27}$;
- 3.3 a. valor mín: -14 , valor máx: 112 ;
 b. valor mín: $-\frac{11}{4}$, valor máx: 28 .
- 3.4 a. pontos de mín: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$,
 pontos de máx: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$;
 b. ponto de mín: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 +$
 $\frac{4}{\sqrt{5}})$, ponto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 -$
 $\frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$;
 c. pontos de mín: $(0,1,-2)$
 e $(1,0,-2)$, ponto de máx:
 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$;
 d. pontos de mín: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$,
 $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, pontos de
 máx: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.

- 3.5 a. valor mín: $-19 - 6\sqrt{7}$, valor
 máx: $-19 + 6\sqrt{7}$;
 b. valor mín: $-19 - 6\sqrt{7}$, valor
 máx: $-\frac{1}{2}$.
- 3.6 a. pontos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e
 $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, ponto de máx:
 $(0,0,-2)$;
 b. os mesmos que em a.;
 c. pontos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e
 $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, pontos de máx:
 $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;
 d. os mesmos que em c.;
 e. ponto de mín: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, pon-
 tos de máx: $(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp$
 $\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$.
- 4.1 $(1,1)$ e $(-1,-1)$;
 4.2 $(0,-1,2)$.
 4.3 $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{100}{3}$.
 4.4 $3\sqrt[3]{2}$.
 4.5 Os vértices são $(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3})$.
 4.6 Os vértices são $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e
 $(\pm 1, \pm 1, 2)$.
 4.7 $12(2 - \sqrt{3})$, $2(3 - \sqrt{3})$ e $4(2\sqrt{3} - 3)$.
 4.8 $x + y + 2z - 6 = 0$
 4.9 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
 $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$ e
 $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.
 4.10 base: $3\text{cm} \times 3\text{cm}$, altura $1,5\text{cm}$.
 4.11 largura, profundidade e altura
 iguais a 10 pés.