



BONS ESTUDOS!

1. CURVAS, FUNÇÕES E SUPERFÍCIES DE NÍVEL

EXERCÍCIOS

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

- |                                                                          |                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| a. $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$ ;                              | b. $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ ;      |
| c. $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$                    | d. $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4 \sin t), t \in [-\pi, \pi]$ |
| e. $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$                     | f. $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \geq 0$            |
| g. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | h. $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), t \in \mathbb{R}$ |
| i. $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$                | j. $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^t), t \geq 0$               |

2. Esboce e parametrize cada conjunto  $C$  como uma curva:

- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq -x \text{ e } y \geq x\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x < 0 \text{ e } y > -10\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$ , sendo  $P = (0, 3)$  e  $r$  a reta  $y = 4$ .
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$ , sendo  $P = (2, 0)$  e  $Q = (-2, 0)$ .
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1, x > 0\}$ , com  $P = (2, 0)$  e  $Q = (-2, 0)$ .

**Observação 1.1.** Para os três últimos itens consulte o texto sobre cônicas disponível no site da disciplina, ou clicando diretamente aqui.

- Mostre que a curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  tem duas tangentes em  $(0, 0)$  e ache suas equações. Faça um esboço da curva.
- Considere  $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$ .
  - Mostre que a função  $f$  não é derivável em  $x = 0$ .
  - Determine uma curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de  $f$ .
  - Interprete geometricamente o fato de que  $f$  não é derivável em  $x = 0$ , mas a curva  $\gamma$  é derivável em  $t_0$ , onde  $\gamma(t_0) = (0, 0)$ .
- Sejam  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável. Mostre que, se existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\gamma(t)\| = C$ , para todo  $t \in I$ , então  $\gamma(t)$  é ortogonal a  $\gamma'(t)$ , para todo  $t \in I$ . Vale a recíproca? Interprete geometricamente.
- Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto  $P$  no final do barbante é chamada de *involuta* do círculo. Se o círculo tiver raio  $r$  e centro  $O$ , a posição inicial de  $P$  for  $(r, 0)$ , e se o parâmetro  $\theta$  for escolhido como na Figura 1(a), mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad \text{e} \quad y = r(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

- Uma circunferência de raio  $r$  rola sem escorregar ao longo do eixo  $Ox$ . Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de *ciclóide*, veja Figura 1(b).)

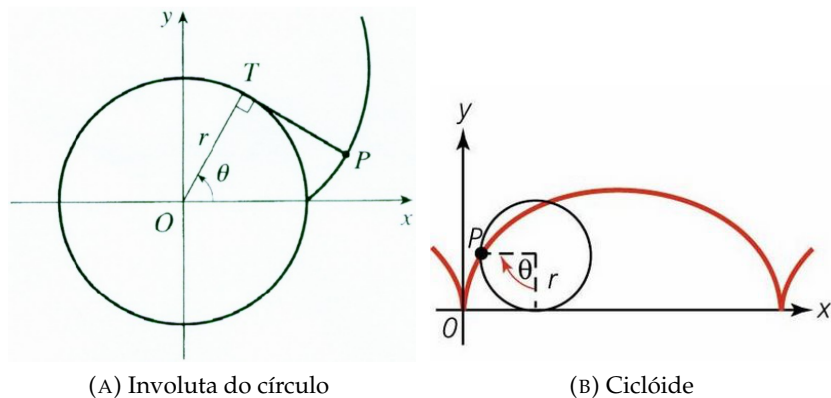


FIGURA 1. Exercícios 6 e 7

8. Para cada função dada, determine o domínio e faça um esboço:

- a.  $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ ;      b.  $f(x, y) = \arctg(\frac{y}{x})$ ;      c.  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ ;  
d.  $f(x, y) = \tan(x - y)$ ;      e.  $f(x, y) = \frac{x}{y^x}$ ;      f.  $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$ ;  
g.  $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$ .

9. Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

- a.  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ ;      b.  $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$ ;  
c.  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$ ;      d.  $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ .

10. Encontre uma parametrização para a curva de nível  $k$  de  $f$  nos casos:

- a.  $f(x, y) = x + 2y - 3, k = -2$ ; b.  $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}, k = 5$ ; c.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}, k = 1$ .

Determine a reta tangente às curvas acima nos pontos  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ,  $(6, 0)$  e  $(\sqrt{2}, 1)$ , respectivamente.

11. Esboce os gráficos de:

- a.  $f(x, y) = 1 - x - y$ ;      b.  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;      c.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$ ;  
d.  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ ;      e.  $f(x, y) = y^2 - x^2$ ;      f.  $f(x, y) = y^2 + 1$ ;  
g.  $f(x, y) = y^2 + x$ ;      h.  $f(x, y) = xy$ ;      i.  $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  
j.  $f(x, y) = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$ ;      k.  $f(x, y) = (x - y)^2$ ;      l.  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$ ;  
m.  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + 2y^2)^2}$ ;      n.  $f(x, y) = \ln(9x^2 + y^2)$ ;      o.  $f(x, y) = 2 - \sqrt[4]{x^2 + 4y^2}$ ;  
p.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ ;      q.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ ;      r.  $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$ .

12. Seja  $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .

- a. Desenhe a imagem de  $\gamma$ , indicando o sentido de percurso.  
b. A imagem de  $\gamma$  está contida numa curva de nível da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$ ? Em caso afirmativo, em qual nível?

13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que:

- a.  $x + 2y + 3z = 1$ ;      b.  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ ;      c.  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ;  
d.  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ;      e.  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ;      f.  $x^2 - y^2 = 1$ ;  
g.  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ .

Alguma dessas superfícies é gráfico de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

14. Verifique que imagem da curva  $\gamma$  está contida na superfície  $S$  e faça um esboço dessa imagem.
- $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2} \sin t), t \in [0, \pi[$  e  $S$  é uma esfera com centro em  $(0, 0, 0)$ ;
  - $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \cos t, \sqrt{t^2 + 1} \sin t, t), t \in \mathbb{R}$  e  $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ;
  - $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 + 4}), t \geq 0$  e  $S$  é o gráfico de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ .
15. Sejam  $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$  e  $f(x, y) = ((x - 2)^2(y - 3))^{\frac{2}{3}} + 1$ . Esboce a imagem de  $\gamma$ . Mostre que essa imagem está contida em uma curva de nível de  $f$  e indique qual é o nível.
16. Sejam  $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 1$  e  $\Gamma(t) = (2 - t, 3 + t, z(t)), t \in \mathbb{R}$ . Sabendo que a imagem (trajetória) de  $\Gamma$  está contida no gráfico de  $g$ , encontre  $z(t)$ . Esboce ainda a imagem de  $\Gamma$ .
17. Desenhe a imagem de cada uma das seguintes curvas:
- $\gamma(t) = (1, t, 1)$ ;
  - $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$ ;
  - $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \geq 0$ ;
  - $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$ ;
  - $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ ;
  - $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$ .
18. Em cada caso, encontre uma parametrização para  $C$  e para a reta tangente a  $C$  no ponto  $P$ :
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$  e  $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ .
  - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$  e  $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ .
  - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$  e  $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ .
  - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 1 \text{ e } y = 2z + 1\}$  e  $P = (-\sqrt{2}, -1, -1)$ .
  - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } x^2 + y^2 = z\}$  e  $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
  - $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4x^2 + y^2} \text{ e } z = 2x + 1\}$  e  $P = (0, 1, 1)$ .
19. Seja  $f(x, y) = \frac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ .
- Esboce as curvas de nível de  $f$  dos níveis  $c = 1, c = 2$  e  $c = 3$ .
  - Encontre uma curva derivável  $\gamma$ , definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , cuja imagem seja a curva de nível de  $f$  do nível  $c = 1$ .
  - Determine o vetor tangente à curva  $\gamma$ , que você encontrou no item anterior, no ponto  $(-1, 0)$ .
  - Seja  $\Gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\Gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$ . Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de  $f$ , encontre o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $\Gamma(\frac{\pi}{3})$ .

- 2 a.  $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ;  
b.  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{t}), t \in ]-\infty, -\frac{1}{10}]$ ;  
c.  $\gamma(t) = (1 + 2 \tan t, 3 \sec t), t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ;  
d.  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(7 - t^2)), t \in \mathbb{R}$ ;  
e.  $\gamma(t) = (5 \cos t, \sqrt{21} \sin t), t \in [0, 2\pi[$ ;  
f.  $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \sec t, \frac{\sqrt{15}}{2} \tan t), t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .
- 3  $y = x$  e  $y = -x$ .
- 4 b.  $\gamma(t) = (t^3, t^2), t \in \mathbb{R}$ .
- 8 a.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\}$ ;  
b.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ ;  
c.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ ;  
d.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;  
e.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ;  
f.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(y - x)(y + x) > 0\}$ ;  
g.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 16\}$ .
- 10 a.  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1 - t)), t \in \mathbb{R}$   
 $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$   
b.  $\gamma(t) = (5 + \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$   
 $X = (6, 0) + \lambda(0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$   
c.  $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$   
 $X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2), \lambda \in \mathbb{R}$   
d.  $k = 1$ : elipse;  $k = 2$ : um par de retas paralelas;  $k = 3$ : uma hipérbole.
- 12 b. Sim, no nível 5.
- 13 Apenas a superfície do item a..
- 15 no nível 2.
- 16  $z(t) = 2t^2 + 1$ .
- 18 a.  $\gamma(t) = \frac{1}{2}(\cos t - 1, \sqrt{2} \sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$   
 $X = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$ ;  
b.  $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t, \sqrt{2} \sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi[$   
 $X = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$ ;  
c.  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -\cos(2t)), t \in [0, 2\pi[$   
 $X = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \lambda(-1, 1, 2\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$ ;  
d.  $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, -1 + 2 \sin t, -1 + \sin t), t \in [0, 2\pi[$   
 $X = (-\sqrt{2}, -1, -1) + \lambda(0, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ ;  
e.  $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t), t \in [0, 2\pi[$   
 $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ ;  
f.  $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1)), t \in \mathbb{R}$   
 $X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$ .
- 19 a.  $c = 1: x^2 + 3y^2 = 1; c = 2: y = 1$  e  $y = -1; c = 3: -\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$ ;  
b.  $\gamma(t) = (\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}), t \in [0, 2\pi[$ ;  
c.  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ;  
d.  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

## 2. LIMITES E CONTINUIDADE

### EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes limites, caso existam. Justifique quando não existirem:

- a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ;  
b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ ;  
c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ ;  
d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4 + x^2 y + y^2}$ ;  
e.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ ;  
f.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ;  
g.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$ ;  
h.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$ ;  
i.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^3}{x^2 + y^2}$ ;  
j.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ ;  
k.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y + y^4 + x^4}{x^3 y - x y^3}$ ;  
l.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + \sin(x^2 + y^2)}{y^4 + \sin(x^2 + y^2)}$ ;  
m.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^4 + x^5 \sqrt[3]{y^4}}{x^6 + y^8}$ ;  
n.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$ .

2. Decida se os limites abaixo existem, determinando seu valor em caso afirmativo:

- a.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ ;      b.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ ;  
 c.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(3x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{1}{y^2 - x^2}\right)$ ;      d.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 \ln(3x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{1}{y^2 - x^2}\right)$ .

3. Determine os pontos de continuidade da seguinte função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^2)(x - 1)^2}{(x^2 + y^2)[(x - 1)^2 + (y - 1)^2]}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (x, y) \neq (1, 1); \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4 + y^2} \sin\left(e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ L, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Existe algum número real  $L$  para o qual  $f$  seja contínua em  $(0, 0)$ ? Justifique.

5. Seja  $f(x, y) = \frac{3(x - 1)^2 + (y - 1)^2}{x^2 - y^2}$ .

- a. Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de  $f$  nos níveis  $k = 1$  e  $k = 3$ .  
 b. Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ ? Justifique.

## RESPOSTAS

1 a. não existe; b. 0; c. 0; d. não existe;  
 e. não existe; f. não existe g. não  
 existe; h. 0; i. 0; j. 0; k. não existe; l.  
 1; m. não existe; n. 0.

2 a. 1; b. 0; c. 0; d. não existe.  
 3  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ .  
 4  $L = 0$ .  
 5 O limite não existe.