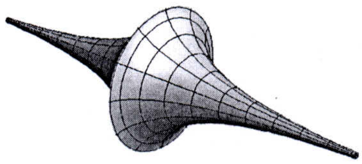


Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

3a. Avaliação de Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II.

Prof. Dr. Thiago Grando.

22/06/2017.

Nome : GABARITO

N^o Pront. : ____________________

Assinatura : ____________________

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Q1. (2,0) Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$ e classifique-os, justificando quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

SOLUÇÃO:

Vamos calcular as derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 6x + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 6x - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Determinemos os pontos críticos da f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff 4x^3 - 6x + 6y = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 4y^3 + 6x - 6y = 0 \quad (\mathrm{II})$$

Somando (I) e (II) temos $4x^3 = -4y^3$, ou seja, $y = -x$. Substituindo em qualquer equação ((I) ou (II)) obtemos:

$$4x^3 - 6x + 6(-y) = 0$$

$$4x^3 - 12x = 0$$

$$4x(x^2-3) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Se $x = 0$, então $y = -x = -0 = 0$;

Se $x = \sqrt{3}$, então $y = -\sqrt{3}$;

Se $x = -\sqrt{3}$, então $y = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

Logo os pontos críticos de f são:

$(0,0)$; $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Agora vamos classificá-los quanto a máximo, mínimo local ou sela.

Para tal, note que $f \in C^2$ em $\mathbb{R}^2$, então existe $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função hessiana da f, e é dada por:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

CONTINUAÇÃO 1:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 6 & 6 \\ 6 & 12y^2 - 6 \end{vmatrix}$$

$$= (12x^2 - 6)(12y^2 - 6) - 36$$

$$H(0,0) = (-6)(-6) - 36 = 36 - 36 = 0$$

$$H(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (12(\sqrt{3})^2 - 6)(12(-\sqrt{3})^2 - 6) - 36$$
$$= (12 \cdot 3 - 6)(12 \cdot 3 - 6) - 36$$
$$= 30 \cdot 30 - 36$$
$$= 864 > 0$$

$$H(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 864 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 30 > 0$$

Logo $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são mínimos locais!

Como $H(0,0) = 0$, então nada podemos afirmar sobre este ponto utilizando o método da função hessiano.

Note que:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$$
$$= x^4 + y^4 - 3(x-y)^2$$

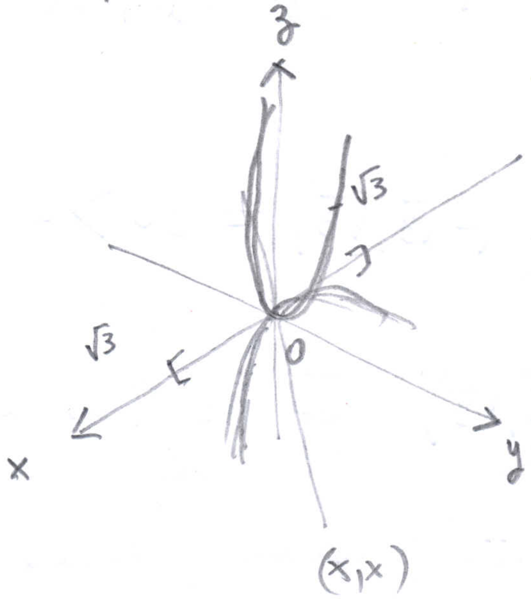
e

$$f(0,0) = 0.$$

Por outro lado, $f(x,x) = x^4 + x^4 - 3(x-x)^2$
$$= 2x^4 \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x,0) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2-3) \leq 0, \quad \forall x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Logo $(0,0)$ é ponto de sela!



Q2. (3,0) Encontre os pontos de máximo e mínimo de f em C, sem parametrizar C, quando:

a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \text{ e } 4x+4y = z^2\}$

b) $f(x,y) = x+y$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2+5y^2+6xy-64 = 0\}$

c) $f(x,y,z) = 2x^2-y^2-z^2$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x+z = 2\}$

SOLUÇÃO:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1$.

Como são constantes, concluímos que $f \in \mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$ e logo diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Defina $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $g(x,y,z) = x^2+y^2-1$ e $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z) = 4x+4y-z^2$. Note que $g, h \in \mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$ e $\nabla h(x,y,z) = (4,4,-2z)$. Calculemos o produto vetorial entre esses vetores:

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2x & 2y & 0 & 2x & 2y \\ 4 & 4 & -2z & 4 & 4 \end{array}\right|$$

$$= (-4yz, 4xz, 8x-8y)$$

Verifiquemos em que $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = 0 :$$

$$(-4yz,\ 4xz,\ 8x-8y) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 4yz = 0 \\ 4xz = 0 \\ 8x - 8y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} yz = 0 & (\mathrm{I}) \\ xz = 0 & (\mathrm{II}) \\ x - y = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

de (III) $x = y$ e de (I) e (II), $yz = 0$, ou seja $y = 0$ ou $z = 0$.

Se $\underline{\underline{y=0}}$ então $x = 0$, e z é real qualquer.

Assim, $(x,y,z) = (0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Se $\underline{\underline{z=0}}$ então $y = x$ e x é real qualquer.

Logo, $(x,y,z) = (x,x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos que nos dois casos $(x,y,z) \in C$!

CONTINUAÇÃO 2-a:

Seja $(x,y,z) = (0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$. Se $(x,y,z) \in C$, então:

$$0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$$

Logo (x,y,z) não pode pertencer a C.

Se $(x,y,z) = (x,x,0) \in C$, então

$$x^2 + x^2 = 1 \quad e \quad 4x + 4x = 0^2$$

$$2x^2 = 1 \quad e \quad 8x = 0$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x = 0$$

o que não ocorre! Logo $(x,y,z) = (x,x,0) \notin C$!

Assim, pelo 3º Teorema de Lagrange, o conjunto

$\{\nabla f(x,y,z);\ \nabla g(x,y,z);\ \nabla h(x,y,z)\}$ é L.D.

Ou seja

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 4 & 4 & -2z \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 4 & 4 & -2z \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ 4 & 4 \end{matrix} = 0$$

$$-4yz + 8x - 8y + 4xz = 0 \quad (\div 4)$$

$$-yz + 2x - 2y + xz = 0$$

$$x(2+z) - y(2+z) = 0$$

$$(x-y)(2+z) = 0 \iff x = y \quad \text{ou} \quad z = -2.$$

Se $y = x$, então

$$x^2 + x^2 = 1 \quad e \quad 4x + 4x = z^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad e \quad 8x = z^2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad 8x = z^2$$

Se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ então $z = \pm\sqrt{8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \pm 2\sqrt[4]{2}$

$\boxed{\text{PONTOS} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt[4]{2}\right) \text{ e } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt[4]{2}\right)}$

CONTINUAÇÃO 2-a :

Se $z = -2$, então

$$x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad 4x + 4y = (-2)^2$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad 4x + 4y = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad x + y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad e \quad y = 1 - x$$

Logo, $x^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow$

$$x^2 + \cancel{1} - 2x + x^2 = \cancel{1} \Rightarrow$$

$$2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$2x(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad ou \quad x = 1$$

Se $x = 0$, então $y = 1 - 0 = 1$ e $z = -2$

Se $x = 1$, então $y = 1 - 1 = 0$ e $z = -2$

$$\boxed{\text{PONTOS : } (0,1,-2) \text{ e } (1,0,-2).}$$

Vamos avaliar f nos 4 candidatos a máximos e mínimos em C:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt[4]{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt[4]{2}$$

$$= \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2}$$ ← VALOR MÁXIMO!

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt[4]{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt[4]{2}$$

$$= \sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2}$$

$$f(0,1,-2) = 0+1-2 = -1$$

$$f(1,0,-2) = 1+0-2 = -1$$

VALORES MÍNIMOS!

Logo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt[4]{2}\right)$ é ponto de máximo de f em C e $(0,1,-2)$, $(1,0,-2)$ são pontos de mínimo de f em C.

b) $f(x,y) = x+y$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2+5y^2+6xy-64=0\}$

<u>SOLUÇÃO</u>:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$, logo f é $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, com isso, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Defina $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x,y) = 5x^2+6y^2+6xy-64$. Note que g é $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$. O vetor gradiente de g é $\nabla g(x,y) = (10x+6y,\ 12y+6x)$.

Vejamos para quais $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{cases} 10x+6y=0 \\ 6x+12y=0 \end{cases} \overset{(\times -2)}{\Longrightarrow} \begin{cases} -20x-\cancel{12y}=0 \\ 6x+\cancel{12y}=0 \end{cases}$$

$$-14x=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=0.$$

Logo $\nabla g(x,y) = (0,0)$ se $(x,y) = (0,0) \notin C$!

Pelo 1º Teorema de Lagrange, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ tal que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

$$(1,1) = \lambda(10x+6y,\ 12y+6x)$$

$$\begin{cases} 10\lambda x + 6\lambda y = 1 \quad (\times -2) \\ 6\lambda x + 12\lambda y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20\lambda x - \cancel{12\lambda y} = -2 \\ 6\lambda x + \cancel{12\lambda y} = 1 \end{cases}$$

$$-14\lambda x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{14\lambda}, \quad \lambda \neq 0.$$

$$6\lambda x + 12\lambda y = 1 \Rightarrow$$

$$6\cancel{\lambda}\frac{1}{14\cancel{\lambda}} + 12\lambda y = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{7} + 12\lambda y = 1 \Rightarrow$$

$$12\lambda y = 1 - \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$12\lambda y = \frac{7-3}{7} \Rightarrow$$

$$\cancelto{3}{12}\lambda y = \frac{\cancelto{1}{4}}{7}$$

$$y = \frac{1}{21\lambda}$$

Substituindo na restrição, temos:

$$5\left(\frac{1}{14\lambda}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{21\lambda}\right)^2 + 6\,\frac{1}{14\lambda}\cdot\frac{1}{21\lambda} - 64 = 0$$

$$\frac{5}{196\lambda^2} + \frac{5}{441\lambda^2} + \frac{6}{294\lambda^2} - 64 = 0$$

CONTINUAÇÃO Q-2 b:

$$\frac{5(441\lambda^2)(294\lambda^2)+5(196\lambda^2)(294\lambda^2)-(196\lambda^2)(441\lambda^2)(294\lambda^2)}{(196\lambda^2)(441\lambda^2)(294\lambda^2)} = 0$$

$$648.270\,\lambda^4 + 288.120\,\lambda^4 - 25.412.184\,\lambda^6 = 0$$

$$936.390\,\lambda^4 - 25.412.184\,\lambda^6 = 0 \quad \div (25.412.184)$$

$$0,037\,\lambda^4 - \lambda^6 = 0$$

$$\lambda^4(0,037 - \lambda^2) = 0 \iff$$

$\lambda^4 = 0$ ou $\lambda^2 = 0,037$

$\cancel{\lambda = 0}$ ou $\boxed{\lambda = \pm\sqrt{0,037}}$

não ocorre!

Logo $x = \dfrac{1}{14\sqrt{0,037}}$ e $y = \dfrac{1}{21\sqrt{0,037}}$ ou

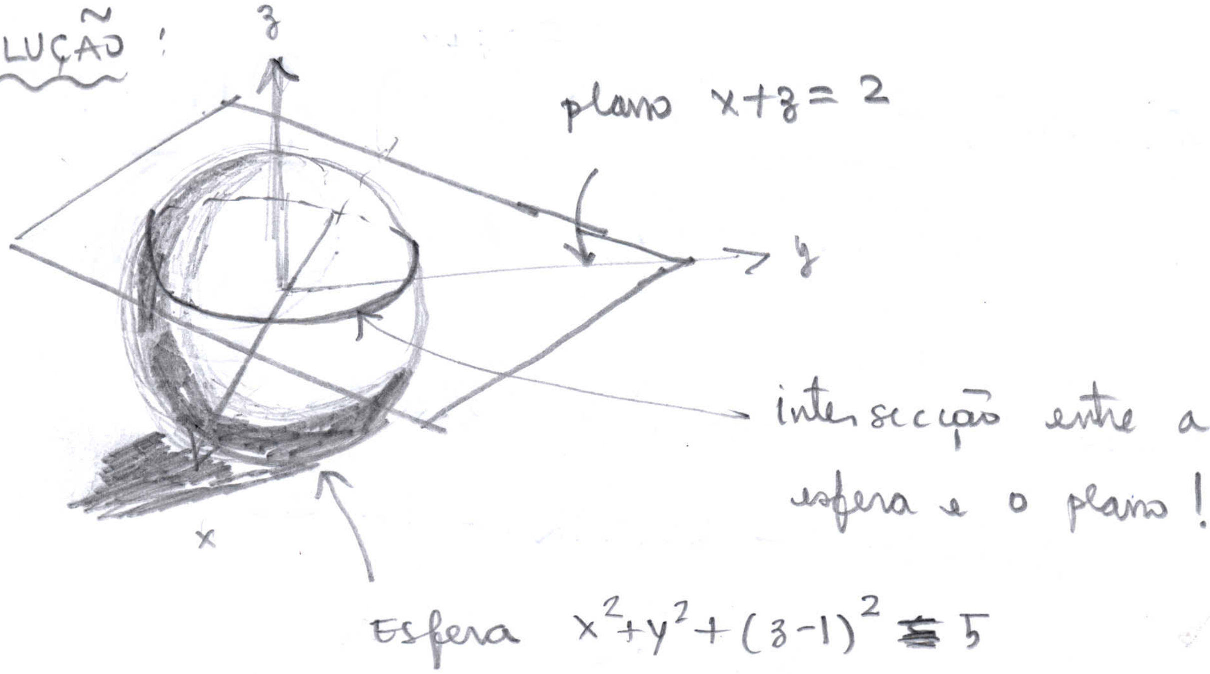
$$x = -\frac{1}{14\sqrt{0,037}} \text{ e } y = -\frac{1}{21\sqrt{0,037}}$$

Por isso $\left(\dfrac{1}{14\sqrt{0,037}}, \dfrac{1}{21\sqrt{0,037}}\right)$ é máximo de f em C e $\left(\dfrac{-1}{14\sqrt{0,037}}, \dfrac{-1}{21\sqrt{0,037}}\right)$ é mínimo de f em C.

c) $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ e

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x+z=2\}$

SOLUÇÃO:



O conjunto C é fechado e limitado em $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $z+x=2$ delimitado pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=5$ e f é contínua em C. Pelo Teorema de Weierstrass $\exists$ ponto de máximo e mínimo em C.

Determinemos então os candidatos:

Sejam $h, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} g(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2-5 \\ h(x,y,z) = x+z-2 \end{cases}$$

Observe que f é função diferenciável e as funções g e h são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$, pois são polinômios.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z$$

Logo
$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = (4x, -2y, -2z) \\ \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2(z-1)) \\ \nabla h(x,y,z) = (1,0,1) \end{cases}$$

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2(z-1) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{?}{=} (0,0,0)$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2x & 2y & 2(z-1) & 2x & 2y \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| = (2y, 2z-2x-2, -2y) \overset{?}{=} (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2(z-x-1) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y = 0$ e $z = 1 + x$.

Então o ponto que anula $\nabla g \wedge \nabla h$ é da forma:

$(x, 0, 1+x)$, onde $x \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos se $(x, 0, 1+x) \in C$:

$$\underbrace{x^2 + 0^2 + (1+x-x)^2 = 2x^2}_{} \text{ e } \quad x + 1 + x \stackrel{?}{=} 2$$

$$2x = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Se $x = \frac{1}{2}$, $2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$!

Pelo 3º Teorema de Lagrange, o conjunto $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ é L.D.

Ou seja,

$$\begin{vmatrix} 4x & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2(z-1) \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$4(3xy + y) = 0$. Substituindo na restrição encontramos os pontos $(2,0,0)$, $(-1,0,3)$, $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Avaliando f:

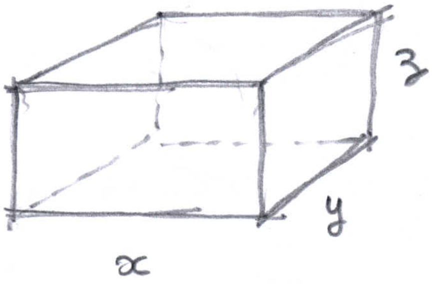
$f(2,0,0) = 8 \leftarrow$ máximo

$f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9} \leftarrow$ mínimo

$f(-1,0,3) = -7$

Q3. (1,0) Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com $27cm^2$ de papelão.

SOLUÇÃO :



$$V(x,y,z) = xyz$$

$$\text{ÁREA} = xy + 2xz + 2yz = 27$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = yz \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = xz \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = xy$$

Logo V é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Defina $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 27$. Note que g é $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^3$. O vetor gradiente de g é dado por:

$$\nabla g(x,y,z) = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y).$$

Vejamos para quais $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla g(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \quad (\text{I}) \\ x + 2z = 0 \quad (\text{II}) \\ 2x + 2y = 0 \quad (\text{III}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} -2(\text{I}) & -2\cancel{y} - 4z = 0 \\ (\text{III}) & 2x + \cancel{2y} = 0 \\ \hline & 2x - 4z = 0 \\ & x = 2z \end{array}$$

Da terceira,

$$x + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$2z + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$4z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

Logo $\boxed{y=0}$ e $\boxed{x=0}$. Então $(0,0,0)$ é o único ponto que anula ∇g. Mas, $(0,0,0)$ não satisfaz a condição da área. Logo pelo 2º. Teorema de Lagrange, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tal que

$$\nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z).$$

$$(yz, xz, xy) = \lambda(y+2z, x+2z, 2x+2y)$$

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) \\ xz = \lambda(x+2z) \\ xy = \lambda(2x+2y) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema chegamos a $x = 1{,}5$, $y = 3$, $z = 3$ cm.

Q4. (2,0) Encontre a solução para o problema de valor inicial e interprete-a geometricamente:

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0$, $y'(0) = -1$ $y(0) = -2$.

b) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.

SOLUÇÃO:

a) $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-2) = 1 + 8 = 9$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} r' = -2 \\ r'' = 1 \end{cases}$$

Logo $y(t) = \lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

é a solução geral da EDO. Queremos uma particular:

$$y'(t) = -2\lambda_1 e^{-2t} + \lambda_2 e^{t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$-1 = y'(0) = -2\lambda_1 e^{-2 \cdot 0} + \lambda_2 \cdot e^{0}$$
$$= -2\lambda_1 + \lambda_2$$

$$-2 = y(0) = \lambda_1 e^{-2 \cdot 0} + \lambda_2 e^{0}.$$
$$= \lambda_1 + \lambda_2$$

Com isso, $\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2 \end{cases}$

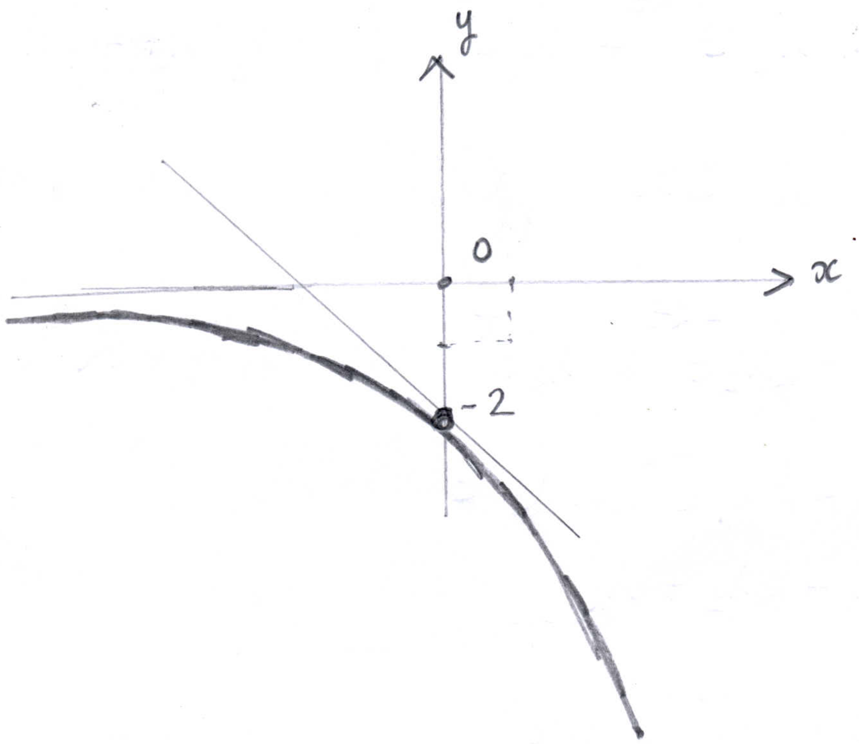
$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$-3\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} + \lambda_2 = -2 \Rightarrow \lambda_2 = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

A solução particular é

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{t}, \quad t \in \mathbb{R}$$



04

b) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad r' = \frac{6}{3} = 2 \qquad r'' = \frac{2}{2} = 1$$

Logo $y(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, é solução geral da EDO acima.

$$y'(t) = 2\lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{t}$$

$$\begin{cases} -4 = y'(0) = 2\lambda_1 e^{2 \cdot 0} + \lambda_2 e^{0} = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = y(0) = \lambda_1 e^{2 \cdot 0} + \lambda_2 e^{0} = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (\times -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \cancel{\lambda_2} = -4 \\ -\lambda_1 - \cancel{\lambda_2} = -1 \end{cases}$$

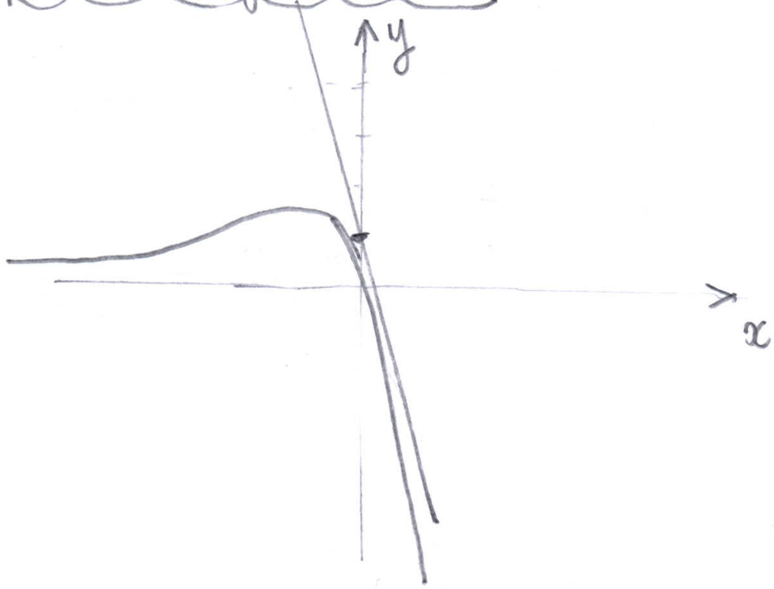
$$\boxed{\lambda_1 = -5}$$

$$-5 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 6}$$

Logo a solução particular é:

$$y(t) = -5e^{2t} + 6e^{t}$$

Interpretação geométrica:



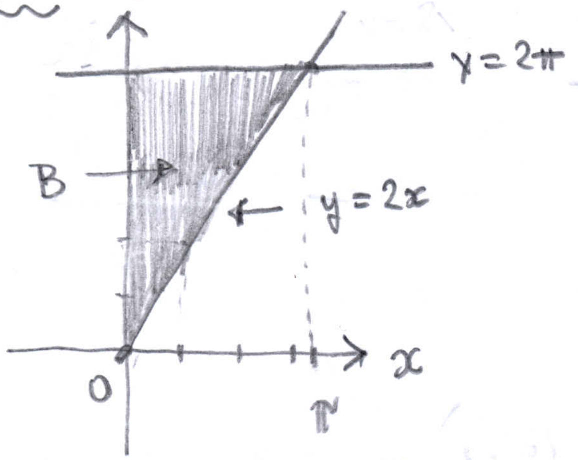
Q5. (2,0) Calcule $\int\int_B f(x,y)dxdy$, sendo dados:

a) $f(x,y) = x\cos(y)$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 2x \leq y \leq 2\pi\}$.

b) $f(x,y) = x + 2y$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

SOLUÇÃO:

a)



Por Fubini, podemos integrar de duas maneiras:

1°: $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=2x}^{y=2\pi} x\cos(y)\,dy \right) dx$

2°: $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=2\pi} \left(\int_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} x\cos(y)\,dx \right) dy.$

1°: $\int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=2x}^{y=2\pi} x\cos(y)\,dy \right) dx =$

$\int_{x=0}^{x=\pi} x \left(\int_{y=2x}^{y=2\pi} \cos(y)\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=\pi} x\,(\operatorname{sen} x)\Big|_{y=2x}^{y=2\pi} dx$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi} x\,(\text{sen}\,2\pi - \text{sen}\,2x)\,dx = -\int_{x=0}^{x=\pi} x\,\text{sen}\,2x\,dx \quad (*)$$

Vamos integrar por partes:

$$\int x \cdot \text{sen}\,2x\,dx \qquad u = x \qquad dv = \text{sen}(2x)\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \text{sen}\,2x\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}$$

Logo,

$$\int x\,\text{sen}\,(2x)\,dx = x\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) - \int -\frac{\cos(2x)}{2}\,dx$$

$$= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\,\text{sen}(2x)$$

Assim, voltando em $(*)$:

$$-\int_{x=0}^{x=\pi} x\,\text{sen}(2x)\,dx = \left(+\frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(2x)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\ \text{u.a.} \ ///$$

$\underline{2^0}$:
$$\int_{y=0}^{y=2\pi} \left(\int_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} x \cos(y)\, dx \right) dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=2\pi} \cos y \left(\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{y=2\pi} \cos y \cdot \frac{y^2}{4}\, dy =$$

$$= \frac{1}{8} \int_{y=0}^{y=2\pi} \cos y \cdot y^2\, dy \qquad (*)$$

Integrando $\int \cos y \cdot y^2\, dy$ por partes:

$u = y^2 \qquad dv = \cos y\, dy$

$du = 2y\, dy \qquad v = \operatorname{sen} y$

$$\int \cos y \cdot y^2\, dy = y^2 \cdot \operatorname{sen} y - \int \operatorname{sen} y \cdot 2y\, dy$$

Integrando agora $\int \operatorname{sen} y \cdot 2y\, dy$ por partes:

$u = y \qquad dv = \operatorname{sen} y\, dy$

$du = dy \qquad v = -\cos y$

$$\int \operatorname{sen} y \cdot y\, dy = y(-\cos y) - \int (-\cos y)\, dy$$
$$= -y \cdot \cos y + \operatorname{sen} y$$

Logo:

$$\int \cos y \cdot y^2\, dy = y^2 \cdot \operatorname{sen} y - 2(-y(\cos y) + \operatorname{sen} y)$$
$$= y^2 \cdot \operatorname{sen} y + 2y \cos y - 2 \operatorname{sen} y$$
$$= \operatorname{sen} y (y^2 - 2) + 2y \cos y$$

Voltando em (*):

$$\frac{1}{8} \int_{y=0}^{y=2\pi} \cos y \cdot y^2\, dy = \frac{1}{8} \left(\operatorname{sen} y (y^2 - 2) + 2y \cos y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2\pi}$$

$$= \frac{2 \cdot 2\pi \; \overset{1}{\cos 2\pi}}{\cancel{8}_{\,2}} = \frac{\pi}{2} \text{ u.v.}$$

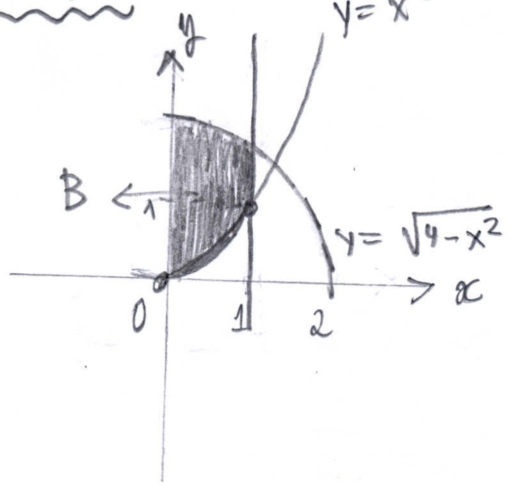
Assim $\displaystyle\iint_B x \cos y \, dx\, dy = \frac{\pi}{2}$ u.v.

Q6. (2,0) Fazendo uma mudança nas variáveis, calcule $\int\int_B f(x,y)dxdy$, quando:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$

b) $\displaystyle\int\int_B \sin(3x^2+y^2)dydx$, onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x^2+y^2 \leq 1 \ y \geq 0\}$.

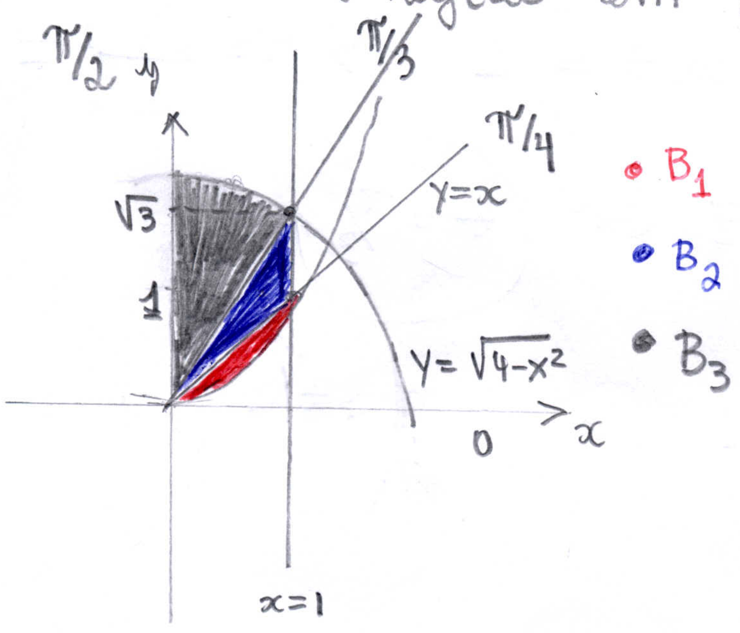
SOLUÇÃO:



$x(r,\theta) = r\cos\theta$

$y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$

Vamos dividir a região em tres regiões:



Vamos mudar cada uma dessas regiões em coordenadas polares:

Região B_1:

$$y = x^2 \Rightarrow r \operatorname{sen}\theta = r^2 \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$B_1 = \left\{ (r,\theta) : 0 \leq r \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \text{ e } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Região B_2:

$$1 = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow 1 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4-1 \Rightarrow$$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$x = 1 \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \pi/3$$

$$B_2 = \left\{ (r,\theta) : 0 \leq r \leq \sec\theta \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

Região B_3:

$$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow r\operatorname{sen}\theta = \sqrt{4-(r\cos\theta)^2} \Rightarrow$$

$$(r\operatorname{sen}\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 = 2^2$$

$r^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$ $\qquad \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$

$$B_3 = \left\{ (r,\theta) : 0 \leq r \leq 2 \text{ e } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi/2 \right\}.$$

Assim $\quad B_{r\theta} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

Agora, calculemos:

$$f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$= \sqrt{r^2} = r$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r$$

Pelo Teorema de Mudança de variáveis, temos:

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B_{r\theta}} f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr\,d\theta$$

$$= \iint_{B_1 \cup B_2 \cup B_3} r \cdot r \, dr\, d\theta =$$

$$\iint\limits_{B_1} r^2\,dr\,d\theta + \iint\limits_{B_2} r^2\,dr\,d\theta + \iint\limits_{B_3} r^2\,dr\,d\theta$$

$$\iint\limits_{B_1} r^2\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \left(\int_{r=0}^{r=\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}} r^2\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\theta=\pi/4} \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=0}^{r=\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^6\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}^2\theta}{\cos^6\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\text{sen}\,\theta\,(1-\cos^2\theta)}{\cos^6\theta}\,d\theta \qquad (*)$$

Chamando $u = \cos\theta$, $du = -\text{sen}\,\theta\,d\theta \Rightarrow$

$-du = \text{sen}\,\theta\,d\theta$

$$\int \frac{1-u^2}{u^6}(-du)$$

$$= -\left(\int u^{-6}\,du - \int u^{-4}\,du \right) = -\left(\frac{u^{-5}}{-5} - \frac{u^{-3}}{-3} \right)$$

$$= \frac{u^{-5}}{5} - \frac{u^{-3}}{3}$$

$$= \frac{(\cos\theta)^{-5}}{5} - \frac{(\cos\theta)^{-3}}{3}$$

Logo, resolvendo (*):

$$\frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^6\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{(\cos\theta)^{-5}}{5} - \frac{(\cos\theta)^{-3}}{3}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^{-5}}{5} - \frac{\left(\sqrt{2}/2\right)^{-3}}{3} - \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right) \text{ u.v}$$

$$\iint_{B_2} r^2\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3}\left(\int_{r=0}^{r=\sec\theta} r^2\,dr\right)d\theta =$$

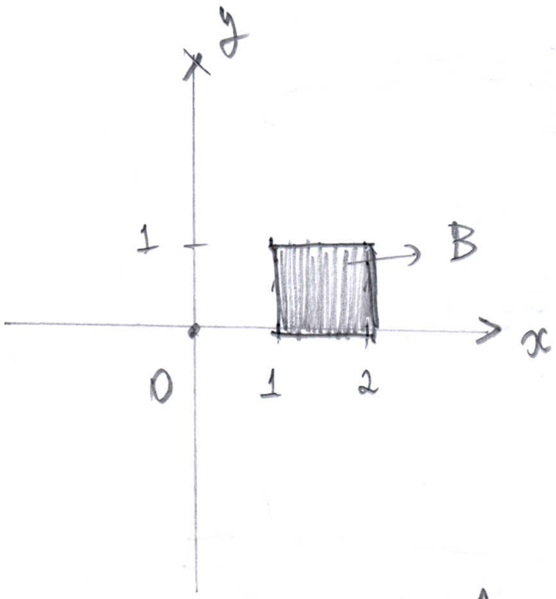
$$= \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} \frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=\sec\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} \sec^3\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sec\theta\cdot\operatorname{tg}\theta + \ln(\sec\theta+\operatorname{tg}\theta)}{2}\right)\Bigg|_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3}$$

$$= \frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3}) - (\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right) \text{ u.v}$$

b) $f(x,y) = x + 2y \quad , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \, , \, 0 \leq y \leq 1\}$



$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=1}^{x=2} (x+2y)\,dx \right) dy$$

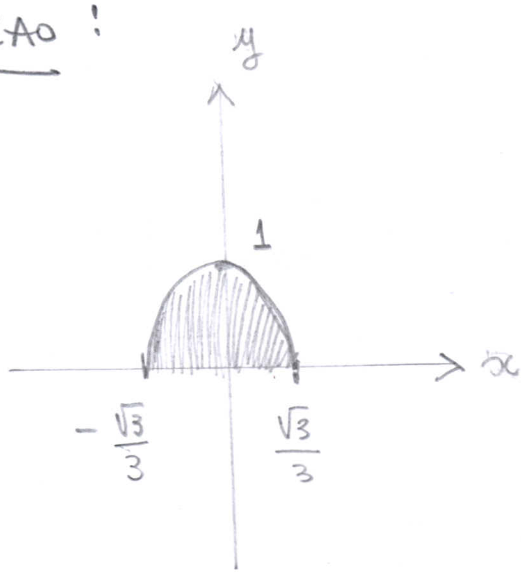
$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2} dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{3}{2} + 2y \right) dy$$

$$= \left(\frac{3}{2} y + 2\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}(3+2) = \frac{5}{2} \text{ u.v.}$$

b) $\displaystyle\iint_B \operatorname{sen}(3x^2+y^2)\,dy\,dx$,

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}$$

SOLUÇÃO :



$$x(r,\theta) = \frac{r\cos\theta}{\sqrt{3}}$$

$$y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$$

Vamos transformar a fronteira em coordenadas polares:

$$3x^2+y^2 = 1$$

$$\cancel{3}\frac{r^2\cos^2\theta}{\cancel{3}} + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1$$

$$r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

Logo $B_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi\}$

$$f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \operatorname{sen}\left(\cancel{3}\frac{r^2\cos^2\theta}{\cancel{3}} + r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= \operatorname{sen}(r^2)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} & -\frac{r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos:

$$\iint_B \text{sen}\,(3x^2+y^2)\,dy\,dx = \iint_{B_r} \text{sen}\,(r^2) \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \text{sen}\,(r^2) \cdot \frac{r}{\sqrt{3}}\,dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \text{sen}\,(r^2)\, r\,dr \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(-\cos(r^2) \Big|_{r=0}^{r=1} \right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\cos(1) - \cos(0) \right) d\theta$$

$$= -\frac{(\cos(1)-1)}{2\sqrt{3}} \cdot \pi \quad u.v.$$

$$\iint_{B_3} r^2\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \left(\int_{r=0}^{r=2} r^2\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/3}^{\theta=\pi/2} \frac{2^3}{3}\,d\theta = \frac{8}{3}\left(\pi/2 - \pi/3\right) \text{ u.v.} \;//$$

Portanto, o resultado final é a soma

de $\iint_{B_1} r^2\,dr\,d\theta + \iint_{B_2} r^2\,dr\,d\theta + \iint_{B_3} r^2\,dr\,d\theta$.