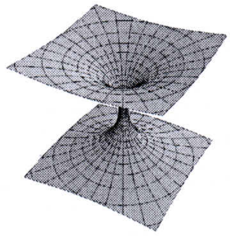
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo.

2a. Avaliação de Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II.

Prof. Dr. Thiago Grando.

09/05/2017.

Nome : GABARITO

N^o Pront. : ______

Assinatura : ______

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Q1. (2,0) Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Usando a definição de diferenciabilidade, mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

SOLUÇÃO

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

b) $$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot \Delta x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - 0 - 1 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \longrightarrow$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x)^3 - \Delta x\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{\cancel{(\Delta x)^3} - \cancel{(\Delta x)^3} - \Delta x \cdot (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{-\Delta x \cdot (\Delta y)^2}{\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Considere as seguintes curvas:

$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma_1(t) = (t, 0)$

$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma_2(t) = (t, t)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{-t \cdot 0^2}{(t^2 + 0^2)\sqrt{t^2 + 0^2}} = 0 \quad \text{(comportamento sobre } \gamma_1\text{)}$$

(comportamento sobre γ_2)

$$\lim_{t \to 0} \frac{-t \cdot t^2}{(t^2 + t^2)\sqrt{t^2 + t^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^3}{2t^2 \cdot \sqrt{2} \cdot |t|} = \lim_{t \to 0} \frac{-t}{2\sqrt{2} \cdot |t|}$$

que não existe pois, $\lim_{t \to 0^+} \frac{-t}{2\sqrt{2} \cdot t} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \lim_{t \to 0^-} \frac{-t}{2\sqrt{2}(-$

Q2. (2,5)Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

b) Existe o plano tangente em $(0,0,f(0,0))$? Se sim, determine.

c) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

SOLUÇÃO: Vamos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

a)

Se $(x,y) \neq (0,0)$ então $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)\cdot(x^2y^2)' - x^2y^2(x^2+y^4)'}{(x^2+y^4)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^4)(2xy^2) - x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3y^2} + 2xy^6 - \cancel{2x^3y^2}}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^4)\cdot 2x^2y - x^2y^2\cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2}$$

$$= \frac{2x^4y + 2x^2y^5 - 4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$$

Se $(x,y) = (0,0)$ então $f(x,y) = 0$, logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) $$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4} - 0 - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

CONTINUAÇÃO 2-a:

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^4)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^4)}}_{(I)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}_{(II)} \cdot \underbrace{\Delta y}_{(III)} \qquad (*)$$

(I): $0 \leq (\Delta x)^2 \leq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^4 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4} \leq 1$

Logo $\dfrac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4}$ é limitada.

(II): $0 \leq (\Delta y)^2 \leq (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{(\Delta y)^2} \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leq 1.$

Com isso, $\dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ é limitada.

(III): Quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ temos que $\Delta y \to 0$.

Assim $(*) = 0$. Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

b) Como f é diferenciável em $(0,0)$, então existe o plano tangente do gráfico de f em $(0,0,f(0,0))$ e cuja equação é dada por:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,(y-0)$$

$$= 0 + 0\cdot(x) + 0\cdot(y) = 0.$$

Assim o plano tangente ao gráfico da f em $(0,0,f(0,0))$ é o plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} \quad (*)$$

Considere as seguintes parametrizações:

$\gamma_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma_1(t) = (t,0)$

$\gamma_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma_2(t) = (t^4, t^2)$

Assim,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{2t\cdot 0^6}{(t^2+0^4)^2} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4\cdot(t^2)^6}{((t^4)^2+(t^2)^4)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4\cdot t^{12}}{(t^8+t^8)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cdot t^{16}}{(2t^8)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cancel{t^{16}}}{4\cancel{t^{16}}} = \frac{1}{2}.$$ Logo $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$.

CONTINUAÇÃO 2-C:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ \frac{2x^4y}{(x^2+y^4)^2} - \frac{2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} \right\}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ 2y \cdot \underbrace{\frac{x^4}{(x^2+y^4)^2}}_{(I)} - y \cdot \underbrace{\frac{2x^2y^4}{(x^2+y^4)^2}}_{(II)} \right\} \quad (*)$$

Note que,

$$0 \leq x^2 \leq x^2+y^4 \implies 0 \leq x^4 \leq (x^2+y^4)^2 \implies$$

$$0 \leq \frac{x^4}{(x^2+y^4)^2} \leq 1 \implies \text{(I) é limitada!}$$

$$0 \leq 2x^2y^4 \leq x^4 + 2x^2y^4 + y^8 = (x^2+y^4)^2 \implies$$

$$0 \leq \frac{2x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} \leq 1 \implies \text{(II) é limitada.}$$

Com isso, $(*) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Portanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$.

Q3. (2,0) Seja $f = f(x, y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u, v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$

Sabendo que $2x + 5y = z + 20$ é uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 8, f(1, 8))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 8) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 8) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 8) = 2$, calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(2, 3)$.

SOLUÇÃO:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \left(u \cdot f(u^2 - v, u + 2v)\right)'$$

$$= u \cdot \left(f(u^2 - v, u + 2v)\right)'$$

$$= u \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v, u + 2v) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v, u + 2v) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right\}$$

$$= u \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v, u + 2v) \cdot (-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v, u + 2v) \cdot 2 \right\}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v, u + 2v)(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v, u + 2v) \cdot 2 \right\} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(-u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v, u + 2v) \right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v, u + 2v) \right)$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v) - u\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v)\right) +$$

$$2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2-v, u+2v)\right) =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v) - u\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v)\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right\} + 2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2-v, u+2v)\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2-v, u+2v)\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right\} =$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v, u+2v) - u\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-v, u+2v)\cdot 2u +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(u^2-v, u+2v)\cdot 1\right\} + 2\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(u^2-v, u+2v)\cdot 2u +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-v, u+2v)\cdot 1\right\}.$$ Por isso,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(2,3) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) - 2\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,8)\cdot 4 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(1,8)\right\}$$

$$+ 2\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,8)\cdot 4 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,8)\right\}$$

CONTINUAÇÃO Q3:

Assim,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(2,3) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) - 2\left\{1\cdot 4 + 1\right\} + 2\left\{\underbrace{1\cdot 4}_{4+2} + 2\right\}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) - 2\cdot 5 + 2\cdot 6$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) - 10 + 12$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) + 2$$

Como $f \in \mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, logo $\exists\ \pi$ plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 8, f(1,8))$, cuja equação é dada por:

$$z = f(1,8) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,8)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,8)(y-8)$$

Como $2x + 5y = z + 20$ é uma eq. do plano tangente ao gráfico de f em $(1, 8, f(1,8))$, devemos ter que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) = 2$. Portanto:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(2,3) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,8) + 2 = -2+2 = 0.$$

Q4. (2,5) Pede-se:

a) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ paralela a reta $4x + 5y = 17$.

b) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de absissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$

SOLUÇÃO:

a) Chame $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 7$ e $g(x,y) = 4x + 5y - 17$.

Para que a reta tangente à curva $x^2+xy+y^2=7$ seja paralela à reta $4x+5y=17$, os vetores $\nabla g(x,y)$ e $\nabla f(x,y)$ devem ser paralelos. Ou seja, deve existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = \alpha \nabla g(x,y)$, logo:

$$(2x+y,\ x+2y) = \alpha \cdot (4,5) \iff$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4\alpha & (\times -2) \\ x + 2y = 5\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 2y = -8\alpha \\ x + 2y = 5\alpha \end{cases}$$

$$-3x = -3\alpha$$

$$x = \alpha$$

$$2x + y = 4\alpha$$
$$2\alpha + y = 4\alpha$$
$$y = 2\alpha$$

Logo $(x,y) = (\alpha, 2\alpha)$

Como (x,y) deve estar sobre a curva $x^2+xy+y^2=7$,

então:

$$\alpha^2 + \alpha\cdot(2\alpha) + (2\alpha)^2 = 7$$

$$\alpha^2 + 2\alpha^2 + 4\alpha^2 = 7$$

$$7\alpha^2 = 7 \iff \alpha = \pm 1$$

Logo, $(x,y) = (1,2)$ ou $(x,y) = (-1,-2)$.

Se $(x,y) = (1,2)$ então $\nabla f(x,y) = (2\cdot1+2,\ 1+2\cdot2)$

$= (4,5)$

Assim a reta que procuramos é:

$$\langle \nabla f(1,2) ; (x-1, y-2)\rangle = 0$$

$$\langle (4,5) ; (x-1, y-2)\rangle = 0$$

$$4(x-1) + 5(y-2) = 0$$

$$y-2 = -\frac{4}{5}(x-1)$$

Se $(x,y) = (-1,-2)$ então $\nabla f(x,y) = (2(-1)-2, -1+2(-2))$

$= (-4,-5)$.

Logo:

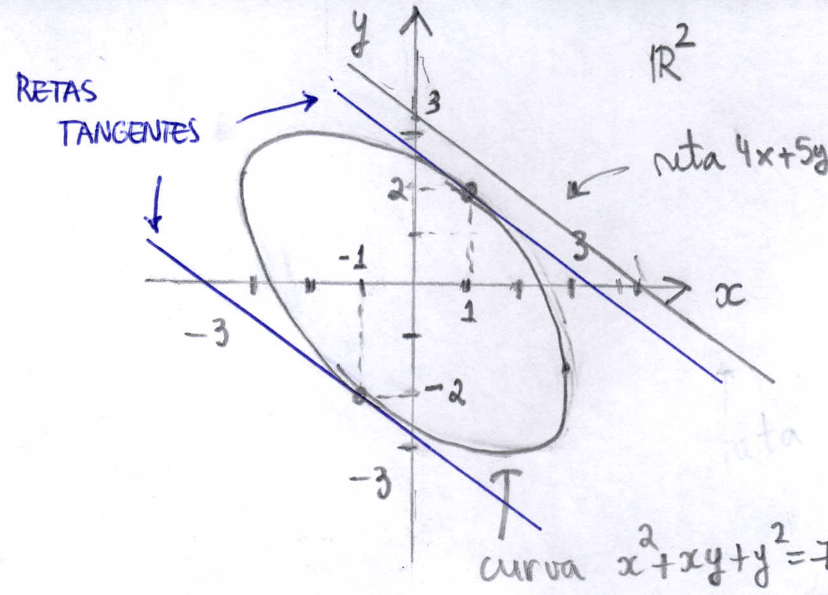
$$\langle \nabla f(-1,-2) ; (x+1, y+2)\rangle = 0$$

$$\langle (-4,-5) ; (x+1, y+2)\rangle = 0$$

$$-4(x+1) - 5(y+2) = 0$$

CONTINUAÇÃO Q4:

$$y+2 = -\frac{4}{5}(x+1)$$



b) Chame $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva definida por

$\gamma(t) = (2t^3-4t, t^4-3t)$. Logo, $\gamma'(t) = (6t^2-4, 4t^3-3)$.

Assim γ é uma curva diferenciável. Como f é diferenciável, a função $g(t) = f(\gamma(t))$ é diferenciável e é válida a regra da cadeia:

$$g'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

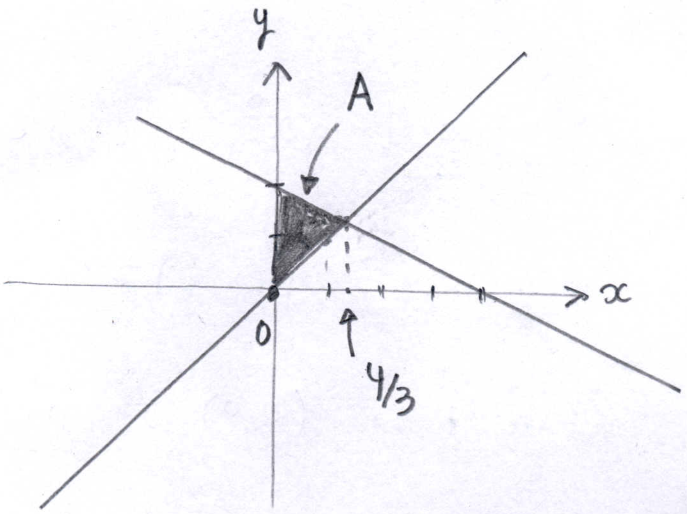
Em particular,

$$\begin{aligned} g'(1) &= \langle \nabla f(\gamma(1)) ; \gamma'(1) \rangle \\ &= \langle \nabla f(-2,-2) ; (2,1) \rangle \\ &= \langle (a,-4) ; (2,1) \rangle = 2a-4. \end{aligned}$$

Queremos que $2a-4=2$, logo $a=3$.

Q5. (1,0) Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ 2y + x \leq 4\}$. Determine os pontos de A de maior e menor temperatura.

SOLUÇÃO: A região A no plano é:



Dividimos $A = \text{Int}(A) \cup \partial(A)$. Primeiro, procuramos pontos extremantes no interior de A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Mas $(0,0) \notin \text{Int}(A)$. Vamos procurar extremantes em ∂A:

Se $\underline{\underline{x = 0}}$ então $T(x,y) = 4 - y^2$, $0 \leq y \leq 2$. Logo

$T'(x,y) = -2y$, $T'(x,y) = 0 \iff y = 0$, $T''(x,y) = -2$

Logo $T''(0,0) = -2 < 0$, ou seja $(0,0)$ é ponto de máximo local.

Note que o ponto de intersecção das retas $y = x$ e $2y + x = 4$ é o ponto $4/3$.

<u>Se</u> $y = x$ então $T(x,y) = 4 - 2x^2$, $0 \leq x \leq 4/3$.

Logo $T'(x,y) = -4x$. Logo $T'(x,y) = 0 \iff x = 0$

$T''(x,y) = -4 < 0$. Com isso $(0,0)$ é máximo local!

<u>Se</u> $y = -\frac{x}{2} + 2$, então $T(x,y) = 4 - x^2 - \left(-\frac{x}{2} + 2\right)^2$

$$T(x,y) = 4 - x^2 - \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right)$$

$$= \cancel{4} - x^2 - \frac{x^2}{4} + 2x - \cancel{4}$$

$$= -\frac{5}{4}x^2 + 2x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$T'(x,y) = -\frac{5}{2}x + 2 \qquad T'(x,y) = 0 \iff x = \frac{4}{5}$

Com isso $y = \frac{8}{5}$. Mas $T\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) \geq T\left(4/3, 4/3\right)$

Logo $(4/3, 4/3)$ é mínimo e $(0,0)$ é o máximo de T em A.