AULA DO DIA 07/05/2018

TEOREMA 11: Sejam $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto A e $(x_0, y_0, z_0) \in A$, com $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, existem uma bola aberta $B(x_0, y_0)$ e um intervalo aberto J, com $z_0 \in J$ tais que para cada $(x, y) \in B$, existe único $g(x,y) \in J$ com $F(x, y, g(x,y)) = 0$. A função $z = g(x,y)$, $(x,y) \in B$ é diferenciável e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x,y))}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x,y))}$$

TEOREMA 12: Sejam $F, G: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em A e $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nestas condições se $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$ em (x_0, y_0, z_0), então existem $I \subset \mathbb{R}$ aberto, $x_0 \in I$ e $y = y(x)$, $z = z(x)$ de classe C^1 em I tal que $F(x, y(x), z(x)) = 0$ e $G(x, y(x), z(x)) = 0$, $y_0 = y(x_0)$, $z_0 = z(x_0)$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS : MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Vamos estudar o método dos multiplicadores de Lagrange que dá uma condição para que um ponto seja extremante local.

Revisão do Cálculo II : (Notação do Cálculo!)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

$f(x,y) = xy$

PTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO de f em A?

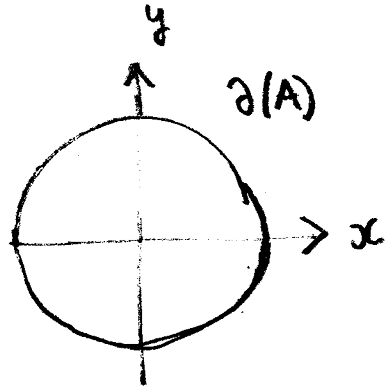
SOL :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

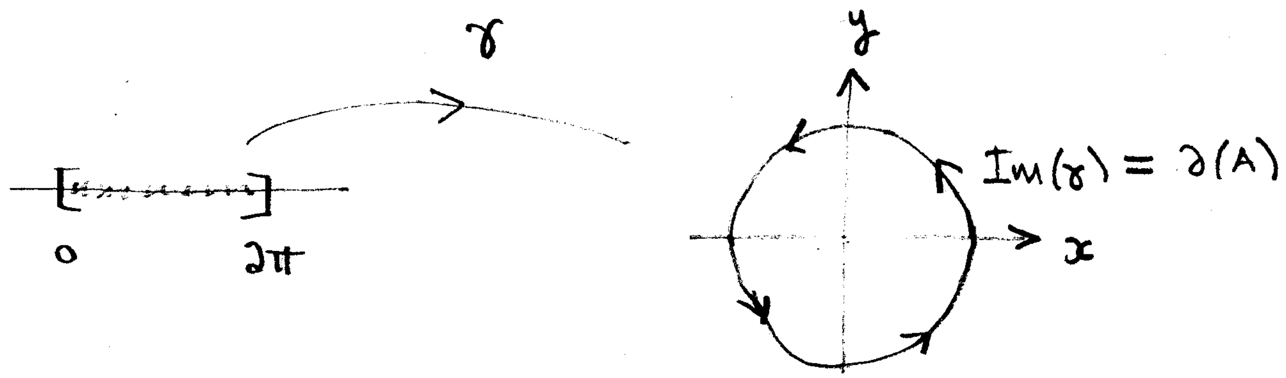
$$\nabla f(x,y) = 0 \iff (y,x) = (0,0) \iff y = 0 = x.$$

Assim $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

$$\partial(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$



Considerando $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ curva definida por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, temos que $Im(\gamma) = \partial(A)$



Logo $f|_{\partial(A)} = f|_{Im(\gamma)}$. Ou seja,

$$f(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \cos t \cdot \operatorname{sen} t$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} \quad \forall \; t \in [0,2\pi]$$

$$f'(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = \frac{1}{\cancel{2}} \cos(2t) \cdot \cancel{2} = \cos(2t)$$
$$\forall \; t \in [0,2\pi]$$

$$f'(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = 0 \iff \cos(2t) = 0$$
$$\iff 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Logo $t = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$ são pontos críticos da função $f(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f(\cos t, \operatorname{sen} t) = -\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow f(\cos t, \operatorname{sen} t) = -\frac{1}{2}$$

Como $f(0,0) = 0$ e A é um conjunto compacto, pelo TEOREMA DE WEIERSTRASS,

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to$ são pontos de máximo de f em A;

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to$ são pontos de mínimo de f em A;

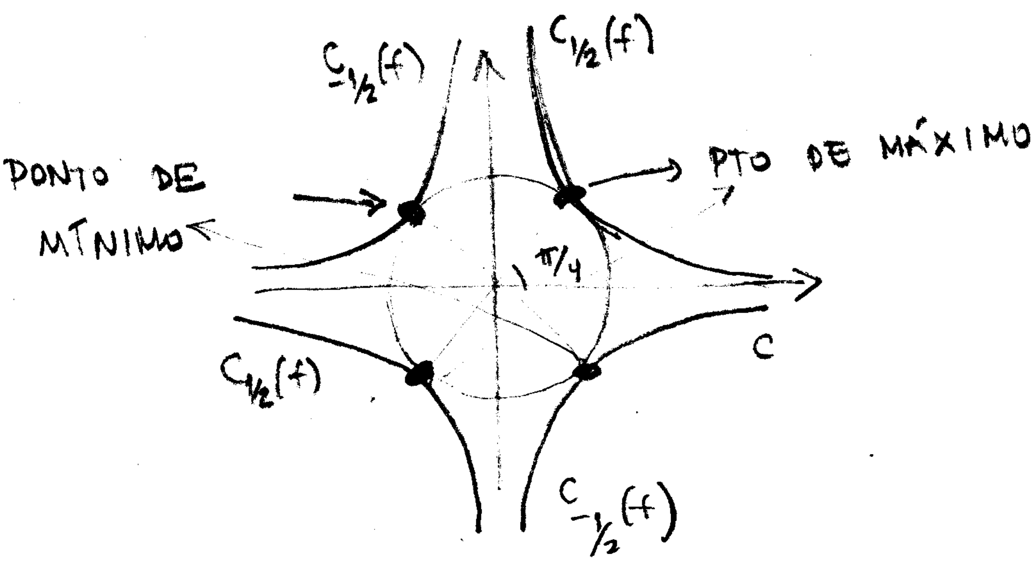
<u>OBSERVAÇÃO</u>: Considere as curvas de nível

$c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$, ou seja, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$f(x,y) = +\frac{1}{2} \quad , \quad f(x,y) = -\frac{1}{2}$$

$$xy = +\frac{1}{2} \quad , \quad xy = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2x} \quad , \quad y = -\frac{1}{2x}$$



Uma outra maneira de encontrar candidatos a extremante local em $\partial(A)$ é a que segue:

$$\partial(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Note que $g \in C^1$ em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla g(x,y) = (0,0) \iff$ $(x,y) = (0,0) \notin \partial(A)$. Nos perguntamos se $\exists \lambda \neq 0$ tq $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Ou seja,

$$(y,x) = \lambda(2x, 2y) \Rightarrow$$

$$y = 2\lambda x \quad e \quad x = 2\lambda y \Rightarrow$$

$$x = \frac{y}{2\lambda} \quad e \quad x = 2\lambda y \Rightarrow$$

$$\frac{y}{2\lambda} = \lambda 2y \Rightarrow y = 4\lambda^2 y \Rightarrow y(4\lambda^2 - 1) = 0$$

$\iff y = 0$ ou $4\lambda^2 - 1 = 0$.

Se $y = 0$, então $x = 0$, mas $(0,0) \in \partial(A)$.

Se $4\lambda^2 - 1 = 0$ então $\lambda = \pm \frac{1}{2}$.

L Se $\lambda = \frac{1}{2}$ então $y = \frac{1}{2} \cdot (2x) \Rightarrow y = x$

Como $(x,y) \in \partial(A)$, então

$$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são candidatos a extremante local de f em A.

$\llcorner$ se $\lambda = -\frac{1}{2}$ então $y = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x$, $\quad y = -x$

logo $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$.

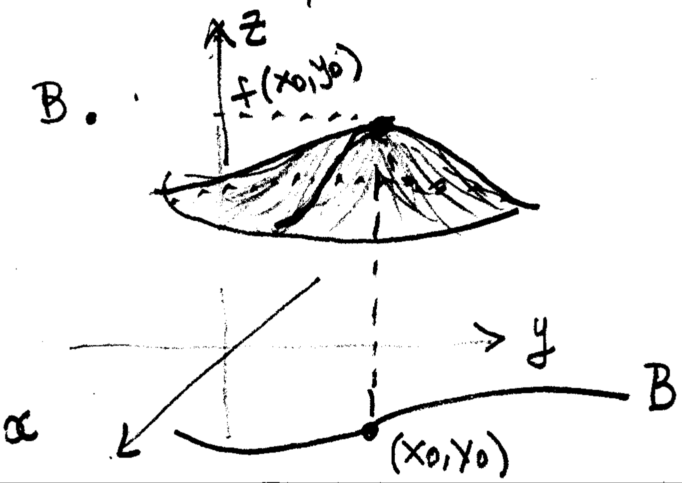
AULA DO DIA 09/05/2018.

TEOREMA 13: Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$ para alguma g de classe C^1 em A com $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ em B. Se (x_0, y_0) é ponto de máximo ou de mínimo local de f em B, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

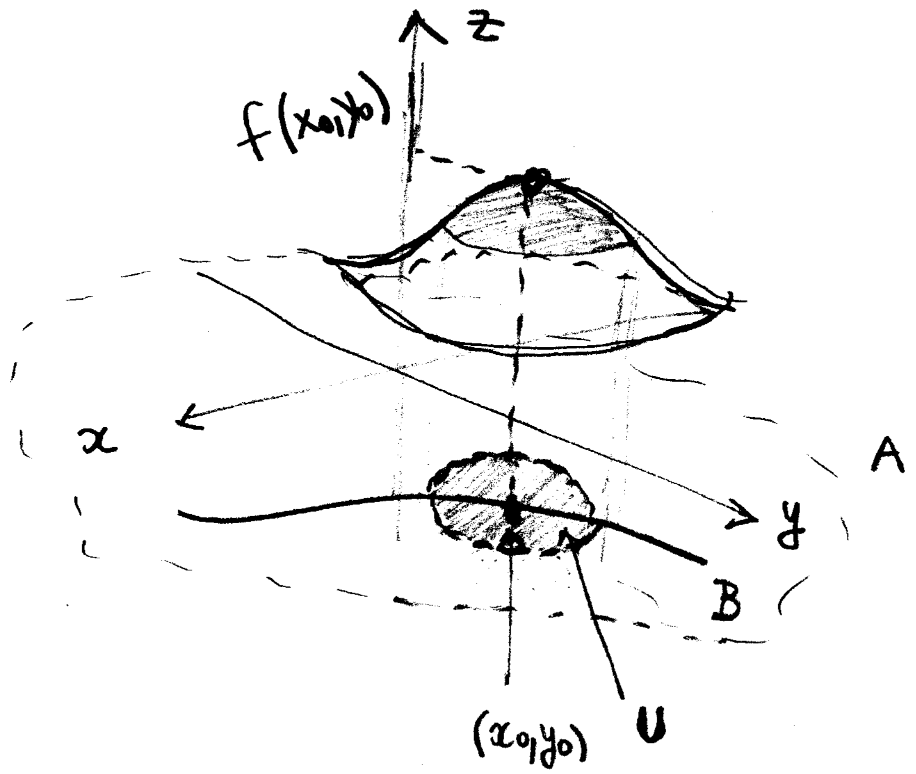
Demonstração:

Sem perda de generalidade, suponha que $(x_0, y_0) \in B$ é um ponto de máximo local de f em B.

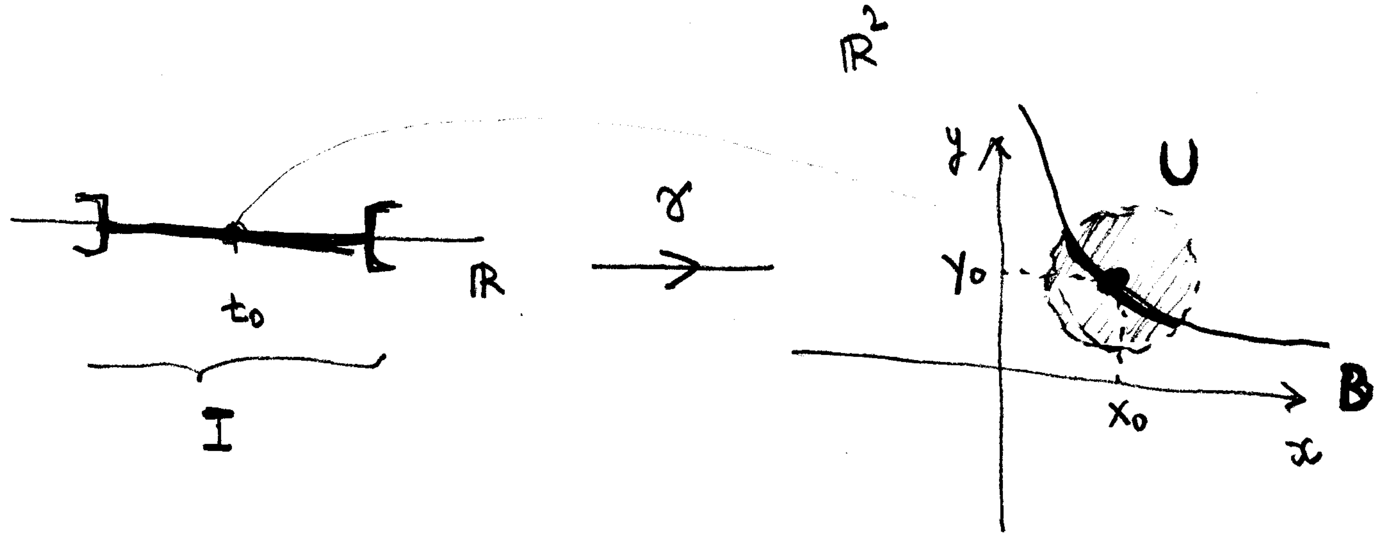


Logo existe uma bola aberta U centrada em (x_0, y_0) tal que

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad , \quad \forall\ (x,y) \in U.$$



Como g é de classe C^1 em A, $g(x_0,y_0) = 0$ e $\nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$, pelo TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, tal que para cada $t \in I$ existe único $\gamma(t) \in B$, com $g(\gamma(t)) = 0$, $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algum $t_0 \in I$ e $\gamma : I \to U$ diferenciável. $\gamma'(t_0) \neq 0$



Assim,

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0)) \quad , \quad \forall\ t \in I .$$

Logo considerando a função composta $f\circ\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f\circ\gamma(t) := f(\gamma(t))$ temos que t_0 é um ponto de máximo local de $f\circ\gamma$. Como t_0 é ponto interior de I, temos que $(f\circ\gamma)'(t_0) = 0$. Do TEOREMA DA REGRA DA CADEIA,

$$0 = (f\circ\gamma)'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$

Como $g(\gamma(t)) = 0$, $\forall\, t \in I$, então

$$0 = (g \circ \gamma(t_0))' = \langle \nabla g(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle$$

Como $\nabla g(\gamma(t_0)) \neq (0,0)$ e

$$\begin{cases} \langle \nabla g(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle = 0 \\ \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle = 0 \end{cases}$$

então o conjunto $\{ f(\gamma(t_0)), g(\gamma(t_0)) \}$ é LD, ou seja, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda \nabla g(\gamma(t_0))$.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: A recíproca do TEOREMA 13 não é verdadeira:

considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x,y) = y + x^3$ e $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^3 = 0 \}$

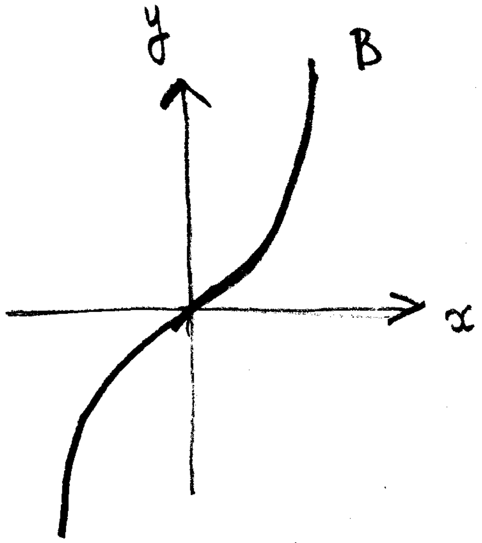
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Logo, $\nabla f(x,y) = (3x^2, 1)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Além disso,

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^3 = 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$$

onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = y - x^3$.



$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -3x^2$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Logo g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e

$$\nabla g(x,y) = (-3x^2, 1) \neq (0,0) \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Fazendo $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, $(x,y) \in B$

temos : $(3x^2, 1) = \lambda(-3x^2, 1)$

$$\begin{cases} 3x^2 = -\lambda \cdot 3x^2 & \text{I} \\ 1 = \lambda & \text{II} \end{cases}$$

Substituindo II em I,

$$3x^2 = -3x^2 \Rightarrow$$

$$6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Como $(x,y) \in B$, então $y - x^3 = 0$, ou seja, $y = 0$ Assim o único candidato a máximo ou mínimo local de f em B é $(0,0)$.

Porém, se $(x,y) \in B$, então $y = x^3$, logo $f(x,y) = y + x^3 = x^3 + x^3 = 2x^3$. Assim,

$$\begin{cases} f(x,y) < 0 & \text{, se } x < 0 \\ f(x,y) > 0 & \text{, se } x > 0 \end{cases}$$

Ou seja, $(0,0)$ é ponto de sela de f.

Portanto, $(0,0) \in B$ que satisfaz a condição $\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0)$, para $\lambda = 1$, mas que não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f em B.

Exemplo:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) := xy$. Determinar os pontos de máximo e mínimo de f na elipse:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2+5y^2+6xy-64=0\}$$

SOLUÇÃO: Primeiro, vamos determinar os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f na elipse, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange (TEOREMA 13):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Logo, f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, por isso, uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2+5y^2+6xy-64=0\}$$

ELIPSE

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} \text{ onde}$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x,y) = 5x^2+5y^2+6xy-64$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 10x + 6y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 10y + 6x$$

$\Rightarrow$ g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Em particular g é de classe C^1 em B.

Devemos garantir que $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ p/ $(x,y) \in B$:

$$\nabla g(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 10x + 6y = 0 \\ 6x + 10y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 0 \\ -10x - \frac{100}{6} y = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $y = 0$ e $x = 0$. Logo $\nabla g(x,y) = (0,0)$ apenas quando $(x,y) = (0,0) \notin B$. Assim $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in B$. Pelo TEOREMA 13, se (x,y) é pto de máximo ou de mínimo local de f em B existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y)$$

$$(y,x) = \lambda\,(10x + 6y,\ 10y + 6x)$$

Se $\lambda = 0$, então $(x,y) = (0,0) \notin B$.

Assim, ~~podemos~~ supor $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \lambda(10x+6y) = y \\ \lambda(10y+6x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\lambda x + (6\lambda-1)y = 0 & \text{(I)} \\ 10\lambda y + (6\lambda-1)x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 10\lambda y = (1-6\lambda)x \Rightarrow y = \left(\frac{1-6\lambda}{10\lambda}\right)\cdot x$$

SUBST. em (I)

$$\Rightarrow 10\lambda x + (6\lambda-1)\cdot\left(\frac{1-6\lambda}{10\lambda}\right)x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{100\lambda^2 x - (1-6\lambda)^2\cdot x}{10\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow 100\lambda^2 x - (1-6\lambda)^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (100\lambda^2 - 1 + 12\lambda - 36\lambda^2)x = 0$$

$$\Rightarrow (64\lambda^2 + 12\lambda - 1)x = 0$$

(pois se $x=0 \Rightarrow y=0$)

$$\Rightarrow 64\lambda^2 + 12\lambda - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \cancel{x = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 64(-1)}}{2\cdot 64} = \frac{-12 \pm 20}{128}$$

$$\lambda = \frac{1}{16} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

Se $\lambda = \frac{1}{16}$ então $y = \dfrac{1 - 6 \cdot \frac{1}{16}}{10 \cdot \frac{1}{16}} \cdot x$

$$= \frac{16-6}{10} x = x$$

Logo $5x^2 + 5x^2 + 6x^2 - 64 = 0$

$$16x^2 = 64$$

$$x = \pm 2$$

$\boxed{\text{PONTOS} \rightarrow (\pm 2, \pm 2)}$

Se $\lambda = -\frac{1}{4}$ então $y = \dfrac{1 - 6\left(-\frac{1}{4}\right)}{10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot x$

$$= \frac{4+6}{-10} x$$

$$= -x$$

Logo, $5x^2 + 5(-x)^2 + 6x(-x) - 64 = 0$

$$4x^2 = 64$$

$$x = \pm 4$$

$\boxed{\text{PONTOS} \rightarrow (\pm 4, \mp 4)}$

Como B é um conjunto compacto (ELIPSE) do $\mathbb{R}^2$, e f é contínua em B, pelo TEOREMA DE WEIERSTRASS f atinge seus extremos em B.

Como os pontos $(\pm 2, \pm 2)$ e $(\pm 4, \mp 4)$ são os únicos candidatos a extremos de f em B, faremos a avaliação:

$$f(+2,+2) = 2 \cdot 2 = 4$$
$$f(-2,-2) = 4$$
$$f(4,-4) = -16$$
$$f(-4,4) = -16$$

Portanto $(2,2)$ e $(-2,-2)$ são pontos de máximo de f em B e 4 é o valor máximo que f atinge em B, e, $(4,-4)$, $(-4,4)$ são pontos de mínimo de f em B e -16 é o menor valor que f atinge em B.