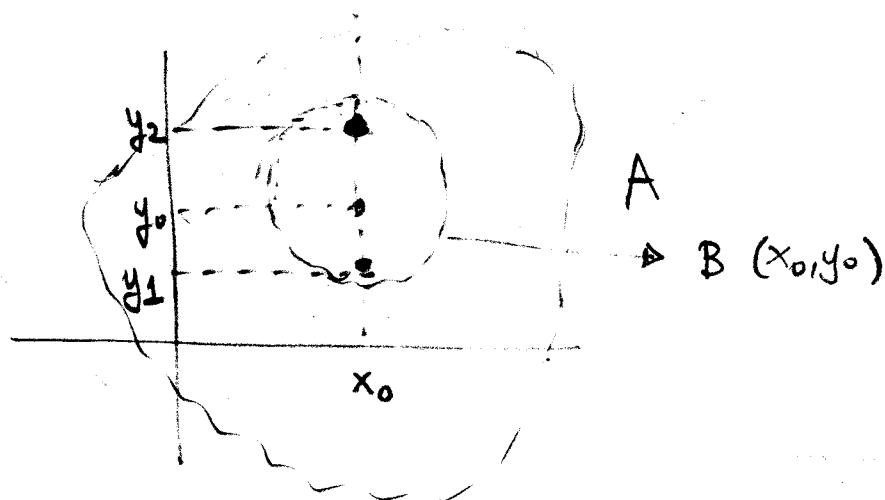


AULA DO DIA 02/05/2018

TEOREMA 40 (DA FUNÇÃO IMPLÍCITA). Sejam $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja $(x_0, y_0) \in A$ com $F(x_0, y_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, então existem $I, J \subset \mathbb{R}$ (intervalos abertos), $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que para cada $x \in I$ existe único $g(x) \in J$, com $F(x, g(x)) = 0$. A função $g: I \rightarrow J$ é diferenciável e

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}.$$

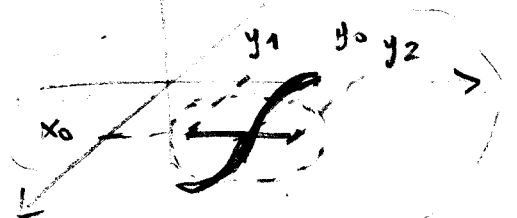
DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade, vamos supor que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Como F é de classe C^1 no aberto A então $\frac{\partial F}{\partial y}$ é contínua em A . Logo existe uma bola aberta $B(x_0, y_0)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ em B . (Podemos considerar $B(x_0, y_0) \subset A$, porque A é aberto). • Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y_1 < y_0 < y_2$ e $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in B$.



Fixando x_0 , considere a função $z = F(x_0, y)$, $y \in [y_1, y_2]$

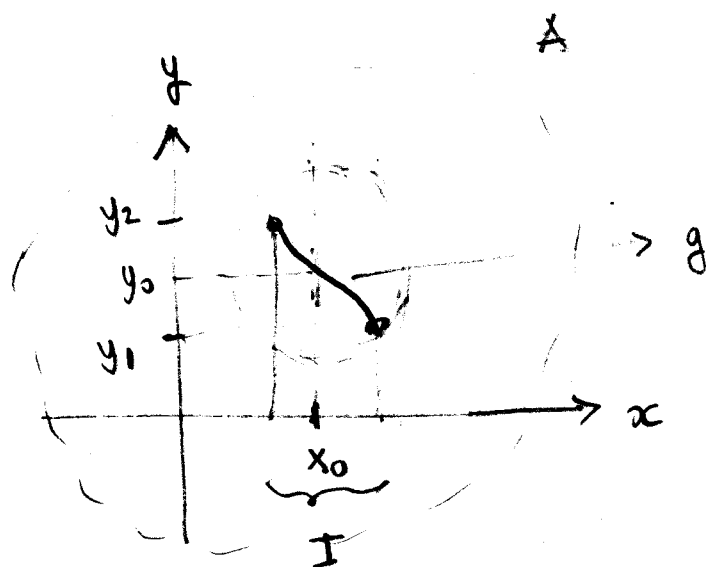
Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0$ para todo $y \in [y_1, y_2]$, a função $z = F(x_0, y)$ é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$. Como $F(x_0, y_0) = 0$ então

$$\begin{cases} F(x_0, y) < 0 & , \quad \forall y \in [y_1, y_0[\\ F(x_0, y) > 0 & , \quad \forall y \in]y_0, y_2] \end{cases}$$



Defina $J :=]y_1, y_2[$.

Como F é contínua, existe um intervalo aberto I com $x_0 \in I$, tal que p/ todo $x \in I$, (x, y_1) e $(x, y_2) \in B(x_0, y_0)$ com $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$.



Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ em $B(x_0, y_0)$, $\forall x \in I$, a

função $z = F(x, y)$ (x fixo) é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$.

Como $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$, pelo teorema do valor intermediário e como $z = F(x, y)$ é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$, existirá um único $g(x) \in [y_1, y_2]$ tal que $F(x, g(x)) = 0$.

A função $\tilde{g}: I \rightarrow J$ está definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. (*)

Para dar continuidade na demonstração do TEOREMA vamos precisar do resultado auxiliar:

FATO: Seja $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável em (x_0, y_0) . Então existem $\varphi_1, \varphi_2: A \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi_1(x, y)(x - x_0) + \varphi_2(x, y)(y - y_0) \quad (\triangle)$$

com $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi_i(x, y) = 0 = \varphi_i(x_0, y_0)$, $i = 1, 2$.

(*) : Voltando a dem. do TEO 10.

Como $g: I \rightarrow J$ está definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$, então

$$F(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Logo, substituindo em (A), $y = g(x)$ e $y_0 = g(x_0)$ temos:

$$\begin{aligned} 0 = F(x, g(x)) &= \overbrace{F(x_0, g(x_0))}^{=0} + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + \\ &+ \varphi_1(x, g(x))(x - x_0) + \varphi_2(x, g(x))(g(x) - g(x_0)) \end{aligned}$$

Dividindo a equação acima por $x - x_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) \cdot \underbrace{\frac{x - x_0}{x - x_0}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &+ \varphi_1(x, g(x)) \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} + \varphi_2(x, g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\quad \parallel \\ &\quad 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) - \varphi_1(x, g(x)) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) + \varphi_2(x, g(x)) \right) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Tomando o limite quando $x \rightarrow x_0$,
temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) - \varphi_1(x, g(x)) \right\} =$$

$\nearrow x_0 \quad \nearrow g(x_0) = y_0$
 $\nearrow x \quad \nearrow g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{x_0} (x_0, g(x_0)) + \underbrace{\varphi_2(x, g(x))}_{x_0, g(x_0)} \right) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) - \overbrace{\varphi_1(x_0, y_0)}^{=0} = \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}_{\neq 0} + \overbrace{\varphi_2(x_0, y_0)}^{=0} \right) g'(x_0)$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}_{\neq 0} \cdot g'(x_0)$$

$\Rightarrow$

$$g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}$$

//