

DEFINIÇÃO 14 : Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ uma função.

Dizemos que a função $g: B \rightarrow A$ é a função inversa de f se

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in A.$$

Notação : $g = f^{-1}$

Exemplo : A função $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definida

por $f(x, y) = (e^x, \sqrt{y})$ tem inversa dada

por $g(x, y) = (\ln x, y^2)$ pois :

$$\begin{aligned} g(f(x, y)) &= g(e^x, \sqrt{y}) \\ &= (\ln(e^x), (\sqrt{y})^2) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 15 : Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos

que f é injetora se para todo $x, y \in A$

com $f(x) = f(y)$ tivermos que $x = y$.

Exemplo : $\text{Id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função injetora.

Exemplo : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x, y^2)$ não é injetora.

DEFINIÇÃO 16 : Dizemos que uma matriz B de ordem n é não-singular quando $\det B \neq 0$.

TEOREMA 8 : Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k com $f'(x) = B$. Se f é injetora sobre A e $Df(x)$ é não-singular, para todo $x \in A$, então o conjunto B é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e sua função inversa $g: B \rightarrow A$ é de classe C^k .

TEOREMA 9 (TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA) Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k . Se $Df(x)$ é não singular em um ponto $a \in A$, existe uma vizinhança U de a tal que $f: U \rightarrow V$ é bijetora, para algum V aberto de $\mathbb{R}^n$ e sua função inversa $g: V \rightarrow U$ é de classe C^k .

Exemplo: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Note que f é a transformação em coordenadas polares.

1º: f é de classe C^k em $\mathbb{R}^2$

Chame $f_1(r, \theta) = r \cos \theta$ e $f_2(r, \theta) = r \sin \theta$.

Então $\begin{cases} D_1 f_1(r, \theta) = \cos \theta & \text{e} & D_2 f_1(r, \theta) = -r \sin \theta \\ D_1 f_2(r, \theta) = \sin \theta & \text{e} & D_2 f_2(r, \theta) = r \cos \theta \end{cases}$

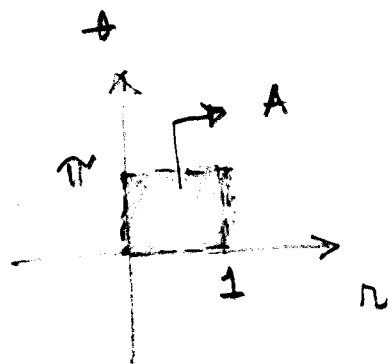
que são funções contínuas, pto f é de classe C^1 .

Procedendo dessa forma, mostra-se que f é de classe C^k p/ qqr $k \in \mathbb{N}$.

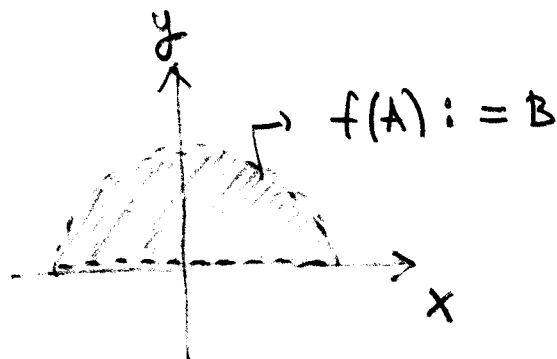
2º: Se $A = \{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1 \text{ e } 0 < \theta < \pi \}$

então $f(A) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1 \text{ e}$

$0 < y < \sqrt{1-x^2} \}$



f
→



3º: $Df(r, \theta)$ é não-singular, p/ todo $r \neq 0$.

Como f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e logo $Df(r, \theta)$ existe para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} Df(r, \theta) &= \begin{bmatrix} D_1 f_1(r, \theta) & D_2 f_1(r, \theta) \\ D_1 f_2(r, \theta) & D_2 f_2(r, \theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } \det Df(r, \theta) &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ &= r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r \neq 0 \quad \forall \end{aligned}$$

$\gamma(r, \theta) : r \neq 0$.

4º: f é injetora em A ;

$$f(r_1, \theta_1) = f(r_2, \theta_2) \Rightarrow \|f(r_1, \theta_1)\| = \|f(r_2, \theta_2)\|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(r_1 \cos \theta_1)^2 + (r_1 \sin \theta_1)^2} = \sqrt{(r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_2 \sin \theta_2)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{r_1^2} = \sqrt{r_2^2} \Rightarrow |r_1| = |r_2| \xrightarrow{r_1, r_2 > 0} r_1 = r_2$$

$$\Rightarrow (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1) = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 &= r_2 \cos \theta_2 & 0 < \theta_1, \theta_2 < \pi \\ r_1 \sin \theta_1 &= r_2 \sin \theta_2 & \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$

Logo, $(r_1, \theta_1) = (r_2, \theta_2)$. e f é injetora em A .

Veja que f não é injetora em $\mathbb{R}^2$!

Logo, pelo TEOREMA 8, o conjunto $B = f(A)$ é aberto de $\mathbb{R}^n$ e sua função inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ é de classe C^k .