AULA DO DIA 09/04/2018

Exemplo:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\text{sen}\, x, \cos y)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$

1°: f é diferenciável em (0,0):

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, onde $f_1(x,y) = \text{sen}\, x$, $f_2(x,y) = \cos y$

↑ FUNÇÕES COMPONENTES

f_1 é dif. em (0,0):

$$B_1 := [D_1 f_1(0,0) \quad D_2 f_1(0,0)]$$
$$= [\cos(0) \quad 0]$$
$$= [1 \quad 0]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1((0,0)+h) - f_1(0,0) - B_1 \cdot h}{\|h\|} =$$

$(h = (h_1, h_2))$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(h_1,h_2) - 0 - [1 \ 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} h_1 - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left\{ \frac{\operatorname{sen} h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right\}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\substack{\text{limitada} \\ (*)}} \left\{ \overbrace{\frac{\operatorname{sen} h_1}{h_1}}^{\to 0} - 1 \right\} = 0.$$

→ caso $h_1 \neq 0$, se $h_1 = 0$ o lim é zero.

$(*)$:

$$0 \leq h_1^2 \leq h_1^2 + h_2^2 \implies 0 \leq \sqrt{h_1^2} \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \implies$$

$$|h_1| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \implies -1 \leq \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1$$

Assim f_1 é diferenciável em $(0,0)$.

f_2 é dif. em $(0,0)$:

$$B_2 := [D_1 f_2(0,0) \quad D_2 f_2(0,0)]$$
$$= [0 \quad 0]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2((0,0)+h) - f_2(0,0) - B_2 \cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_2(h_1,h_2) - 1 - [0\ \ 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cos h_2 - 1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{limitada}} \overbrace{\left(\frac{\cos h_2 - 1}{h_2}\right)}^{0} = 0$$

Logo f_2 é dif. em $(0,0)$.

Pelo TEOREMA 4-a, f é diferenciável em $(0,0)$, com derivada dada por $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2°: g é diferenciável em $b = f(0,0) = (0,1)$

$$B := [\,D_1 g(0,1) \quad D_2 g(0,1)\,]$$
$$= [0 \quad 2]$$

$h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g((0,1)+h) - g(0,1) - B\cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{g(h_1, 1+h_2) - g(0,1) - [0\ \ 2]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 + (1+h_2)^2 - 1 - 2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 + \cancel{1} + \cancel{2h_2} + h_2^2 - \cancel{1} - \cancel{2h_2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

Ptto g é diferenciável em $(1,0) = f(0,0)$ e sua derivada é $Dg(1,0) = [0\ 2]$.

$\underline{3°}$: $f(\mathbb{R}^2) = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 = \text{Dom}(g)$

Logo pelo TEOREMA 7, a composta $g \circ f$ é diferenciável em $(0,0)$ e tem derivada:

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(0,0) &= Dg(1,0) \cdot Df(0,0) \\ &= [0\ 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [0\ 0]. \end{aligned}$$

Exemplo:

Suponha que a função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ satisfaz:

$$f(0,0,0) = (1,2)$$

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = (x + 2y + 1,\ 3xy).$$

Calcular $D(g \circ f)(0,0,0)$.

SOLUÇÃO: Como $Df(0,0,0)$ existe, então f é diferenciável em $(0,0,0)$. Vejamos que g é diferenciável em $(1,2) = f(0,0,0)$. Para isso verifiquemos que g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y) := (g_1(x,y),\ g_2(x,y)) \text{ onde}$$

$$g_1(x,y) = x + 2y + 1$$
$$g_2(x,y) = 3xy$$

→ FUNÇÕES COMPONENTES DE G

$$D_1 g_1(x,y) = 1 \qquad D_2 g_1(x,y) = 2$$

$$D_1 g_2(x,y) = 3y \qquad D_2 g_2(x,y) = 3x$$

que são funções constantes ou polinomiais. Ptto funções contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Pelo TEOREMA 5, g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Em particular g é diferenciável em $(1,2) = f(0,0,0)$.

Logo sua derivada em $(1,2)$ é a matriz:

$$Dg(1,2) = \begin{bmatrix} D_1 g_1(1,2) & D_2 g_1(1,2) \\ D_1 g_2(1,2) & D_2 g_2(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Além disso, $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{Dom}(g)$. Logo, pelo Teorema 7, a composta $g \circ f$ é diferenciável em $(0,0,0)$ e sua derivada é:

$$D(g\circ f)(0,0,0) = Dg(1,2) \cdot Df(0,0,0)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 12 & 21 \end{bmatrix}$$

O próximo exemplo mostra que a recíproca do TEOREMA 5 não é verdadeira:

Exemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1°: f é diferenciável em $(0,0)$:

$$D_1 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{t^2}} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{t}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|t|}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+te_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right) - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{t}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|t|}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

Assim a matriz Jacobiana da função f em $(0,0)$ é a matriz 1×2:

$$B = [D_1 f(0,0) \quad D_2 f(0,0)].$$

$$= [0 \quad 0]$$

Ela é a candidata a derivada de f em $(0,0)$:

$(h = (h_1, h_2))$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+h) - f(0,0) - B \cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - [0\,0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) - 0 - 0h_1 - 0\cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

Portanto f é diferenciável e sua derivada é a matriz $Df(0,0) = [0 \ \ 0]$.

$\underline{\underline{2^o}}$: f não é de classe C^1 em todo aberto A que contém $(0,0)$:

Se $(x,y) \neq (0,0)$ então

$$D_1 f(x,y) = (x^2+y^2)' \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cdot\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)'$$

$$= 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'$$

$$= 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \cancel{(x^2+y^2)}\cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot \frac{-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot \cancel{2}x}{x^2+y^2}$$

$$= 2x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

e

$$D_2 f(x,y) = 2y \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Vejamos que $D_1 f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$:

$$D_1 f(t,0) = 2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|t|}\right) - \frac{t}{|t|} \cdot \cos\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

$$\lim_{t \to 0} \underbrace{2t}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|t|}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} \cos\left(\frac{1}{|t|}\right) = \lim_{t \to 0} \overset{=\pm 1}{\operatorname{sgn}(t)} \cdot \cos\left(\frac{1}{|t|}\right)$$

que não existe

então $\lim_{t\to 0} D_1 f(t,0)$ não existe

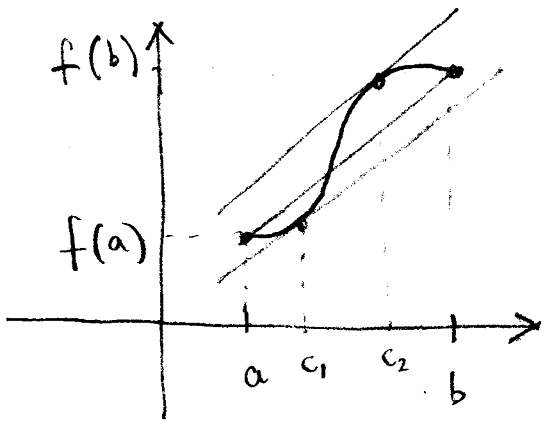
AULA DO DIA 11/04/2016

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). O TEOREMA DO

VALOR MÉDIO garante a existência de $c \in]a,b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(c, f(c))$ é <u>paralela</u> à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Em outras palavras, existe $c \in]a,b[$ tal que

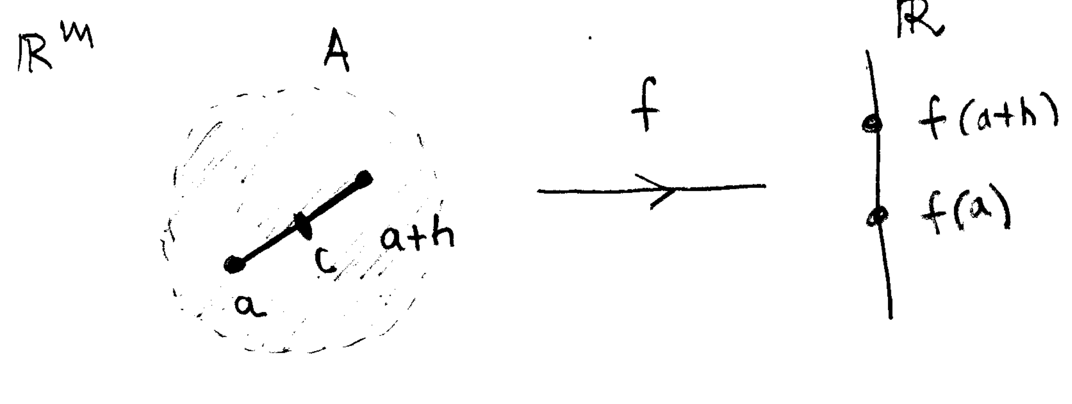
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{b-a}_{h}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

onde $h = b-a$



O Exercício 1 da L2 complementar é uma generalização desse resultado:

<u>Exercício 1 da L2 complementar</u>:

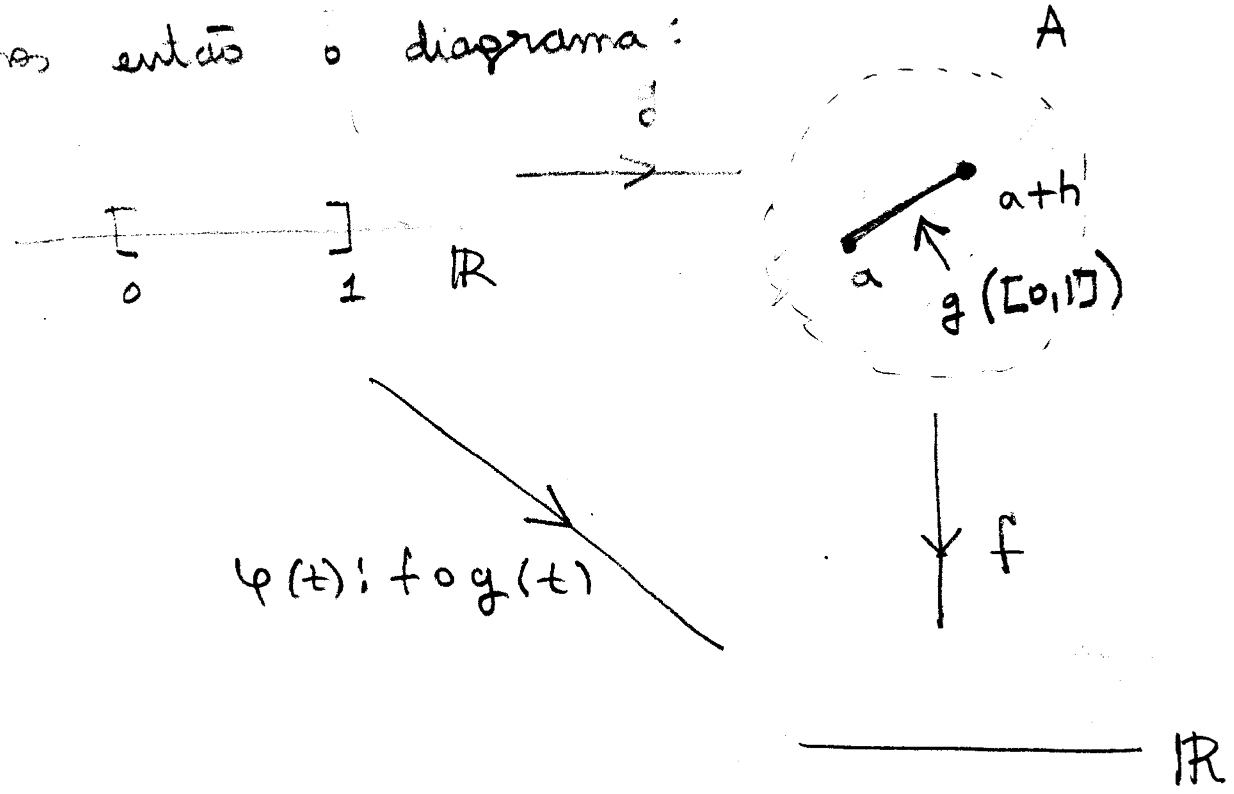


Considere $a,\ a+h \in A$. O segmento de reta com extremos a e $a+h$ é a função:

$$\begin{aligned} g: [0,1] &\to A \\ t &\mapsto g(t) = t(a+h) + (1-t)a \\ &\qquad\quad = \cancel{at} + th + a - \cancel{at} \\ &\qquad\quad = a + th \end{aligned}$$

Para todo $t \in (0,1)$, $Dg(t) = h$.

Temos então o diagrama:



Defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f \circ g(t)$.

Como g é diferenciável em $(0,1)$, f é diferenciável em A e $g([0,1]) \subset A$, pelo TEOREMA 7, φ é diferenciável em $(0,1)$ e

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = D(f \circ g)(t) &= Df(g(t)) \circ Dg(t) \\ &= Df(a+th) \cdot h \quad (*) \end{aligned}$$

Pelo TEOREMA DO VALOR MÉDIO EM UMA VARIÁVEL, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\varphi'(t_0) = \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1-0} = \frac{f\circ g(1) - f\circ g(0)}{1}$$

$$= f(g(1)) - f(g(0))$$

$$= f(a+h) - f(a). \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ temos,

$$f(a+h) - f(a) \overset{(**)}{=} \varphi'(t_0) \overset{(*)}{=} Df(a+t_0h)\cdot h$$

Ptto,

$$f(a+h) - f(a) = Df(a+t_0h)\cdot h$$

p/ algum $t_0 \in (0,1)$.

Considere a aplicação identidade $i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por: $i(x,y) = (x,y)$. Suas funções componentes são dadas pelas funções:

$$i_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad i_1(x,y) = x$$
$$i_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad i_2(x,y) = y$$

i_1 e i_2 são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e logo diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$. Portanto i é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e sua derivada é a matriz 2×2:

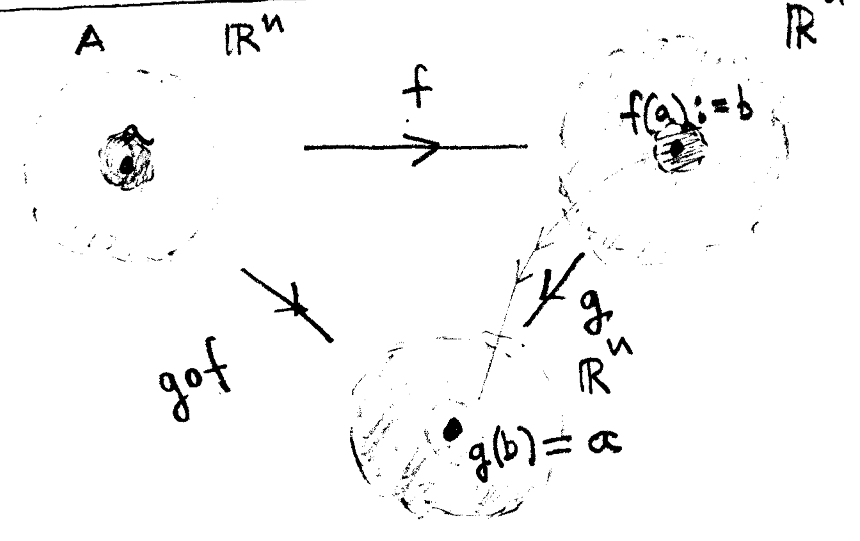
$$Di(x,y) = \begin{bmatrix} D_1 i_1(x,y) & D_2 i_1(x,y) \\ D_1 i_2(x,y) & D_2 i_2(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Ou seja, a derivada da função identidade $i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a matriz identidade de ordem 2.

Analogamente, a derivada da função identidade de $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é a matriz identidade de ordem n.

<u>Exercício 2 da L2 complementar:</u>



Para todo x numa vizinhança de a tem-se que:

$$g(f(x)) = x = i(x).$$

Como f é diferenciável em a, g é diferenciável em b e que $f(A)$ está contida numa vizinhança de b, pelo TEOREMA 7,

$$I_n = D(g \circ f)(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$$

Logo, $$Dg(b) = [Df(a)]^{-1}.$$

Ou seja $Dg(b)$ é a matriz inversa de $Df(a)$.

Assim, para que uma função diferenciável f tenha inversa diferenciável, é necessário que a matriz Df seja NÃO-SINGULAR.