AULA DO DIA 02/04/2018

DEFINIÇÃO 12: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f é CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEL em A, ou de CLASSE C^1 em A, se as derivadas parciais $D_j f_i(x)$ de cada função componente de f existe em cada ponto $x \in A$ e são contínuas em A.

O próximo teorema garante a diferenciabilidade das funções de classe C^1:

TEOREMA 5: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Se f é de classe C^1 em A então f é diferenciável em todo ponto de A.

Demonstração: Será exercício da LISTA 3.

Exemplo: Seja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}$. Então g é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$:

SOLUÇÃO:

$$D_1 g(x,y) = \frac{1}{3}(3x^4+2y^4)^{1/3-1}(3x^4)'$$

$$= \frac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$D_2 g(x,y) = \frac{1}{3}\,(3x^4+2y^4)^{1/3-1}\cdot(2y^4)'$$

$$= \frac{8y^3}{3\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0)$$

$$D_1 g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{3t^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{3t}\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} = 0$$

$$D_2 g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[2]{2t^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{2t}\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} = 0$$

Logo,

$$D_1 g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$D_2 g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8y^3}{3\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Como $D_1 g(x,y)$ e $D_2 g(x,y)$ são funções racionais quando $(x,y) \neq (0,0)$, temos que $D_1 g(x,y)$ e $D_2 g(x,y)$ são funções contínuas (lembre que uma função racional é contínua no seu domínio).

Agora, se $(x,y) = (0,0)$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\cdot\sqrt[3]{\frac{x^9}{(3x^4+2y^4)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\cdot\sqrt[3]{\frac{x^8\cdot x}{(3x^4+2y^4)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\sqrt[3]{\frac{(x^4)^2}{(3x^4+2y^4)^2}}\cdot\sqrt[3]{x} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{4\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2}}_{\text{limitada } (*)}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\to 0} \underset{(*)}{=} 0 = D_1 g(0,0)$$

(*): $0 \leq x^4 \leq 3x^4 + 2y^4 \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{x^4}{3x^4+2y^4} \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq \left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2 \leq 1^2 = 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq \sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2} \leq \sqrt[3]{1} = 1$$

Analogamente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_2\, g(x,y) = 0 = D_2\, g(0,0)$ (Verifique!)

Portanto g é uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Pelo TEOREMA 5, g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

<u>DEFINIÇÃO 13</u>: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Dizemos que f é de classe C^k em A se todas as derivadas parciais das funções componentes f_i, de ordem menor ou igual a k, existem e são contínuas em A.

→ <u>Exemplo</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2+y^2, e^{x^2+y^2})$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

AULA DO DIA 04/04/2018

TEOREMA 6: Seja A um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Então para cada $a \in A$

$$D_k D_j(a) = D_j D_k(a).$$

Demonstração: Será exercício da LISTA 3.

Exercício 13 da L2:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a), b) $$D_1 f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot(x^3y - xy^3)' - (x^3y - xy^3)\cdot(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(3x^2y - y^3) - (x^3y - xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y - x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot(x^3-3xy^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2y^2x^3+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0)$$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

//

c)

$$D_1 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_2 f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Note que, para $(x,y) \neq (0,0)$, $D_1 f$ e $D_2 f$ são funções contínuas. No $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0 = D_1 f(0,0)$$

Note que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to} \underbrace{y}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2}_{\text{limitada}} = 0 \quad (*)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{4 \cdot y}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{\text{limitada}} = 0 \quad (*)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^5}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(-y)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2}_{\text{limitada}} \overset{(*)}{=} 0$$

(*):

$0 \leq x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 \leq 1^2 = 1$

Assim $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2$ é limitada. Analogamente, $\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ é limitada. Agora,

$0 \leq x^2y^2 \leq 2x^2y^2 \leq x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow$

$0 \leq \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \leq 1$. Logo $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ é limitada.

Ptto D_1f é contínua em $(0,0)$, ou seja, D_1f é contínua em $\mathbb{R}^2$. Analogamente D_2f é contínua em $\mathbb{R}^2$. Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

d) $$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{D_2f((0,0)+t(1,0)) - D_2f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{D_2f(t,0) - D_2f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{(t^2)^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^4} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1$$

$$D_2 D_1 g(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{D_1 f((0,0) + t(0,1)) - D_1 f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{D_1 f(0,t) - D_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{t^5}{t^4} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} -\frac{t^5}{t^5} = -1,$$

ptto $\qquad D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0)$.

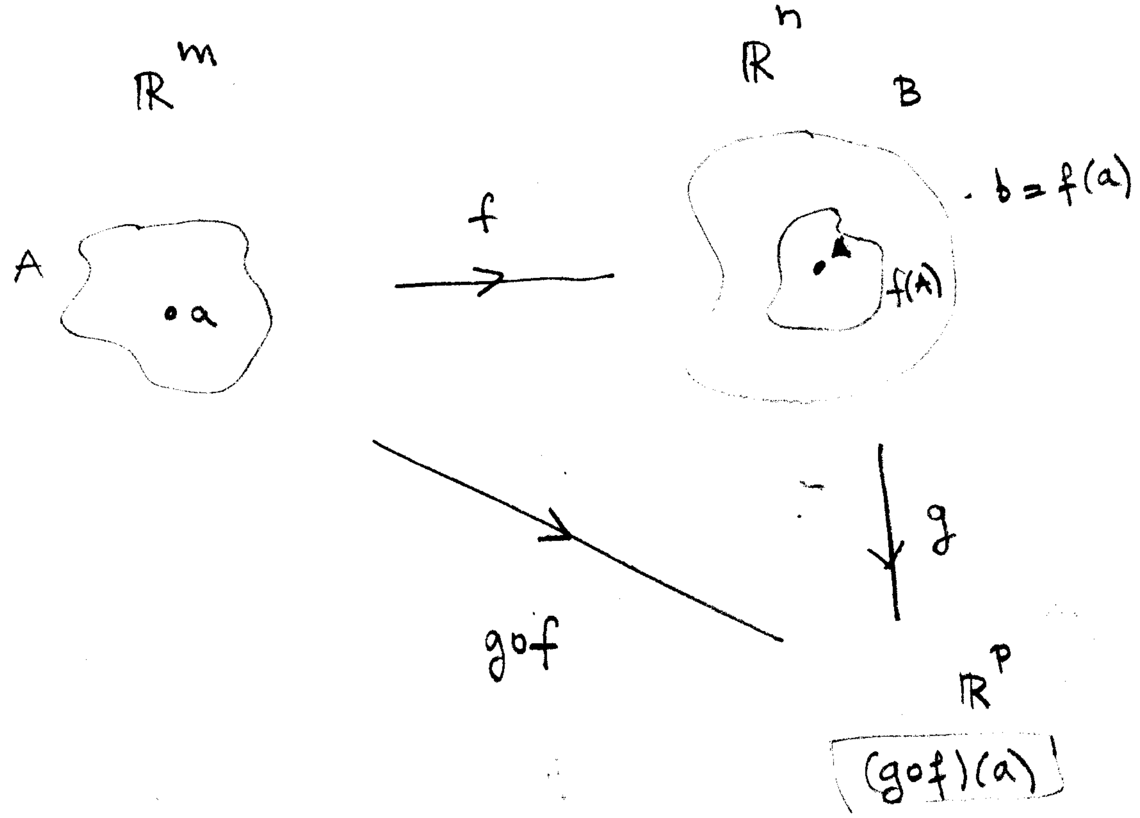
Logo f não é de classe C^2 em aberto que contém $(0,0)$.

REGRA DA CADEIA

O próximo teorema afirma que composta de duas funções diferenciáveis é diferenciável. Ele nos dá uma fórmula para o cálculo da derivada dessa composição. Essa fórmula é conhecida como regra da cadeia.

TEOREMA 7 (REGRA DA CADEIA). Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^n$ e $g: B \to \mathbb{R}^p$ com $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é diferenciável em a com derivada:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \cdot Df(a)$$



Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$

Considere $a = 1$. Sabemos que f é diferenciável em $a = 1$ e g é diferenciável em $b = e^1 = f(1) = f(a)$.

Como $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset Dom(g)$ então pelo TEOREMA 7

a composta $g \circ f$ é diferenciável em $a = 1$ e

$$D(g\circ f)(1) = Dg(e) \cdot Df(1)$$

$$= 2e \cdot e$$

$$= 2e^2$$