AULA DO DIA 19/03/2018

É tentador acreditar que a DERIVADA DIRECIONAL é a generalização apropriada para a noção de derivada e dizer que f é diferenciável em a se $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe p/ todo $u \neq 0$. Essa não seria, no entanto, uma definição muito útil para diferenciabilidade, já que a existência da derivada direcional não implica em continuidade e também não é verdade que, com essa definição, composta de diferenciáveis é diferenciável, como veremos a seguir. Então, buscamos algo mais forte.

Com o intuito de motivar nossa eventual definição, vamos reformular a definição de diferenciabilidade para funções em uma variável:

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que A contém uma vizinhança de a. Dizemos que <u>f é diferenciável em a</u> se existir um número λ tal que

$$\frac{f(a+t) - f(a) - \lambda t}{t} \to 0 \quad \text{quando } t \to 0$$

O número λ, que é único, é chamado de derivada de f em a, e denotado por $f'(a)$.

Essa formulação da definição deixa claro o fato que se f é diferenciável em a, então a transformação linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(t) = \lambda t$ é uma boa aproximação para o incremento $f(a+t) - f(a)$.

Exemplo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

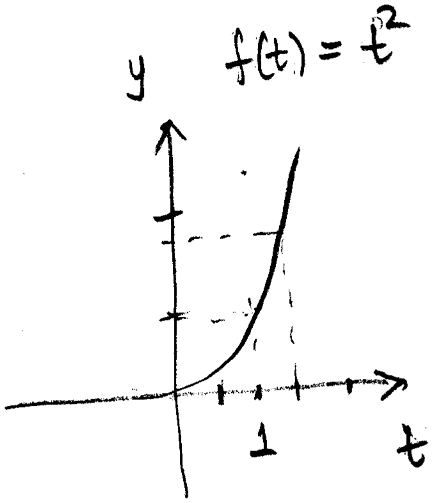
Sabemos que $f'(1) = 2$, já que

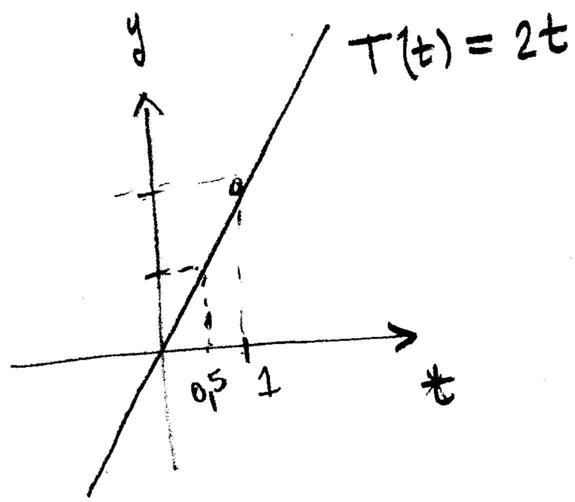
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(1+t) - f(1) - 2t}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^2 - 1 - 2t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{2t} + t^2 - \cancel{1} - \cancel{2t}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t = 0.$$

t	$1+t$	$f(1+t) - f(1)$	$2t$	$f(1+t) - f(t) - 2t$
0,5	1,5	$2{,}25 - 1 = 1{,}25$	1	0,25
0,3	1,3	$1{,}69 - 1 = 0{,}69$	0,6	0,09
0,2	1,2	$1{,}44 - 1 = 0{,}44$	0,4	0,04
0,1	1,1	$1{,}21 - 1 = 0{,}21$	0,2	0,01
0,01	1,01	$1{,}0201 - 1 = 0{,}0201$	0,02	0,0001





É usual chamar a transformação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T(t) = \lambda t$ de aproximação de 1ª ordem, ou aproximação linear da função incremento.

Agora, vamos generalizar essa versão da definição de diferenciabilidade. Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ qual será o significado de "aproximação linear" para a função incremento $f(a+h) - f(a)$?

DEFINIÇÃO 9: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Suponha que A contém uma vizinhança de a. Dizemos que f é **DIFERENCIÁVEL em a** se existir uma matriz B de ordem $n \times m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

A matriz B é chamada de derivada de f em a e é denotada por $Df(a)$.

OBSERVAÇÃO: A matriz B na definição 9 é única.

Suponha f como na definição 9 e B a derivada de f em a. Se existir C tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - C \cdot h}{\|h\|} = 0, \text{ então}$$

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} - \frac{f(a+h) - f(a) - C \cdot h}{\|h\|} \right\} = 0$$

ou seja $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(C-B) \cdot h}{\|h\|} = 0.$

Tomando $u \neq 0$, e considerando $h = t \cdot u$

temos que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(C-B)\cdot h}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{(C-B)\cdot tu}{\|tu\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{(C-B)\cdot tu}{|t|\cdot\|u\|} = 0 \iff$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(C-B)\cdot tu}{|t|\cdot\|u\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{(C-B)\cdot tu}{|t|\,\|u\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{(C-B)\cancel{t}u}{\cancel{t}\,\|u\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{(C-B)\cdot \cancel{t}u}{-\cancel{t}\cdot\|u\|} = 0$$

$\forall u \in \mathbb{R}^m,$
$u \neq 0$

$$\Rightarrow (C-B)\cdot u = 0 \Rightarrow C - B = 0 \Rightarrow C = B.$$

<u>Exemplo</u>: Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x + 9$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Vamos calcular $Df(a)$, para um $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ qualquer.

$f(a+h) = [3 \ \ 1]\cdot(a+h) + 9 \quad , \quad f(a) = [3 \ \ 1]\cdot a + 9$

$f(a+h) - f(a) = [3 \ \ 1]\cdot h$. Logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - [3 \ \ 1]\cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[3 \ \ 1]\cdot h - [3 \ \ 1] h}{\|h\|} = 0 .$$ Portanto, $Df(a) = [3 \ \ 1]$

para qualquer $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

<u>Observação</u>: A função do exemplo anterior pode ser escrita como:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 + 9 .$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 1$

p/ qualquer $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Ou seja,

$$Df(a) = [3 \ \ 1] = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right] .$$

$$= \nabla f(a)$$

Exemplo: Considere a função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que no exemplo anterior podemos verificar que $Df(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ para qualquer $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

O primeiro teorema do nosso curso afirma que se uma função é diferenciável num ponto a, todas as suas derivadas direcionais existem nesse ponto.

TEOREMA 1: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Se f é diferenciável em $a \in A$, então todas as derivadas direcionais de f existem em a e

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = Df(a) \cdot u$$

Demonstração: Suponha que f seja diferenciável em a. Então existe uma matriz $n \times m$ B, a matriz derivada de f em a, $B = Df(a)$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} = 0.$$

Considere $u \in \mathbb{R}^m$, $u \neq \vec{0}$ e $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Seja $h = tu$. Note que $h \to 0$, $t \to 0$.

Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} = 0 \implies$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - B \cdot tu}{\|t \cdot u\|} = 0 \implies$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a) - B \cdot tu}{|t| \cdot \|u\|} = 0 \iff$$

os limites laterais existem e são iguais a 0.

Ou seja

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{|t|\,\|u\|} = 0 \quad e$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{|t|\cdot\|u\|} = 0 .$$

Do primeiro limite lateral,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{|t|\cdot\|u\|} = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{t\cdot\|u\|} = 0 \implies$$ (multiplico por $\|u\|$ a igualdade)

$$\|u\|\cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{t\cdot\|u\|} = 0\cdot\|u\| = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^+} \cancel{\|u\|}\cdot \frac{f(a+tu) - f(a) - B\cdot tu}{t\cdot\cancel{\|u\|}} = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - B\cdot u = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = B\cdot u = Df(a)\cdot u \quad (*)$$

Do segundo limite lateral,

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu)-f(a)-B\cdot tu}{-t\cdot\|u\|} = 0 \implies$$

(multiplicando por $-\|u\|$ a igualdade)

$$-\|u\| \cdot \lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu)-f(a)-B\cdot tu}{-t\|u\|} = 0\cdot(-\|u\|) = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^-} \cancel{-\|u\|}\cdot \frac{f(a+tu)-f(a)-B\cdot tu}{\cancel{-}t\cancel{\|u\|}} = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} - B\cdot u = 0 \implies$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = Bu = Df(a)\cdot u \; (**) .$$

De $(*)$ e $(**)$, concluímos que,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = Df(a)\cdot u$$

Pode existir as derivadas direcionais de uma função num ponto sem que essa função seja diferenciável nesse ponto.

<u>Exemplo</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1°: Existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$.

Seja $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$. Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{(tu_1)^2 \cdot tu_2}{(tu_1)^4 + (tu_2)^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^3}\, u_1^2 \cdot u_2}{\cancel{t^3}\,(t^2 u_1^4 + u_2^2)}$$

$$= \begin{cases} u_1^2/u_2, & \text{se } u_2 \neq 0 \\ 0, & \text{se } u_2 = 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{2^o}}$: f não é diferenciável em $(0,0)$.

Note que, do Teorema 1, se f é diferenciável em a, então $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ é uma transformação linear em u. No entanto, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ não é linear, já que não preserva soma. Logo, pela contrapositiva do Teorema 1, f não é diferenciável em $(0,0)$.

AULA DO DIA 21/03/2018

O próximo teorema afirma que se f é diferenciável em a então f é contínua em a.

TEOREMA 2: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em $a \in A$, então f é contínua em a.

Demonstração: Suponha que f seja diferenciável em $a \in A$. Então existe uma matriz $n \times m$ B, $B = Df(a)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Mostremos que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) - B \cdot h + B \cdot h$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \|\cdot h\| \cdot \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|h\|} + B \cdot h \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \|h\| \cdot \frac{f(a+h) - f(a) - B \cdot h}{\|\cdot h\|} + \lim_{h \to 0} B \cdot h$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Logo, $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Fazendo $x = a+h$, quando $h \to 0$ temos que $x \to a$. Assim,

$\lim_{x \to a} f(x) = a$. Ptto. f é contínua em a.

Vamos denotar os vetores canônicos de $\mathbb{R}^m$ por e_j, ou seja,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \leftarrow \text{j-ésima coordenada}$$
$$\vdots$$
$$e_m = (0, \dots, 0, 1)$$

DEFINIÇÃO 1: Sejam $a \in A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Definimos a j-ésima derivada parcial de f em a como sendo a derivada direcional de f com respeito ao vetor e_j, desde que exista, e denotamos por $D_j f(a)$. Ou seja,

$$D_j f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Os próximos resultados nos ensinam a calcular, quando existe, a matriz $Df(a)$:

TEOREMA 3: Sejam $a \in A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em a, então

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f(a) & D_2 f(a) & \dots & D_m f(a) \end{bmatrix}$$

<u>Demonstração</u>: Suponha que $f: A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em A. Pelo Teorema 1, existe uma matriz $1 \times m$, $Df(a) = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m]$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = Df(a) \cdot u \ , \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, \ u \neq 0.$$

Tomando $u = e_j$, p/ todo $1 \leq j \leq m$, temos:

$$D_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(a) = Df(a) \cdot e_1 = [\lambda_1 \ \lambda_2 \cdots \lambda_m] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1$$

$$D_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(a) = Df(a) \cdot e_2 = [\lambda_1 \ \lambda_2 \cdots \lambda_m] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2$$

$$\vdots$$

$$D_m f(a) = \frac{\partial f}{\partial e_m}(a) = Df(a) \cdot e_m = [\lambda_1 \ \lambda_2 \cdots \lambda_m] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_m .$$

Ptto,
$$Df(a) = [\lambda_1 \ \lambda_2 \cdots \lambda_m]$$
$$= [D_1 f(a) \ \ D_2 f(a) \ \cdots \ D f_m(a)].$$

O próximo teorema generaliza o TEOREMA 3 6

TEOREMA 4: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Suponha que A contém uma vizinhança de a. Seja $f_i: A \to \mathbb{R}$ a i-ésima função componente de f, tal que

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

a) f é diferenciável em a se, e somente se, cada função componente f_i é diferenciável em a.

b) Se f é diferenciável em a, então sua derivada $Df(a)$ é a matriz $n \times m$ cuja i-ésima linha é a derivada da função f_i.

Demonstração: Consequência imediata do Teorema 3.

Assim se uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $a \in A$, sua derivada é a matriz $n \times m$:

$$Df(a) = \begin{bmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_n(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_m f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_m f_2(a) \\ \vdots & & \ddots & \\ D_1 f_n(a) & D_2 f_n(a) & & D_m f_n(a) \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO: Note que se as derivadas parciais da função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existem, então podemos formar a matriz que tem $D_j f_i(a)$ como entrada na linha i e coluna j. Essa matriz é chamada de MATRIZ JACOBIANA. Quando f é diferenciável em a essa matriz é igual a $Df(a)$.

CUIDADO! É possível que a matriz Jacobiana de uma função f exista num ponto a, sem que f seja diferenciável em a.

Exemplo:

Considere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

onde,

$$f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

$1^{\underline{o}}$ f_1 e f_2 são funções diferenciáveis em $(0,0)$:

$$D_1 f_1(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f_1((0,0)+t(1,0)) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^2 \cdot 0^2}{t^2+0^4} - 0}{t} = 0$$

$$D_2 f_1(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f_1((0,0)+t(0,1)) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f_1(0,t) - f_1(0,0)}{t} = 0$$

Formamos a matriz 1×2, $B_1 = [D_1 f_1(0,0) \quad D_2 f_1(0,0)]$

$= [0 \quad 0]$. Assim:

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{f_1((0,0)+h) - f_1(0,0) - B_1 \cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f_1(h_1,h_2) - 0 - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 \cdot h_2^2}{(h_1^2+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^4}}_{(\mathrm{I})} \cdot \underbrace{h_2}_{(\mathrm{II})} \cdot \underbrace{\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{(\mathrm{III})} \qquad (*)$$

(I) é limitado:

$$0 \le h_1^2 \le h_1^2 + h_2^4 \Rightarrow 0 \le \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^4} \le 1 \Rightarrow \text{(I) é limitado;}$$

(II) $\to 0$ quando $(h_1, h_2) \to (0,0)$;

(III) é limitado:

$$0 \le h_2^2 \le h_1^2 + h_2^2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{h_2^2} \le \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \Rightarrow$$

$$0 \le |h_2| \le \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \Rightarrow 0 \le \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 1 \Rightarrow$$

$$-1 \le \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 1 \Rightarrow \text{(III) é limitado.}$$

Assim,

$(*) = 0$, pois é produto de limitado por uma função que vai a zero!

Logo f_1 é diferenciável em $(0,0)$ e $B_1 = Df_1(0,0)$.

$D_1 f_2(x,y) = 2x + 2 \quad , \quad D_2 f_2(x,y) = 2y + 2$

$D_1 f_2(0,0) = 2 \quad$ e $\quad D_2 f_2(0,0) = 2$

Logo $B_2 = [\, D_1 f_2(0,0) \quad D_2 f_2(0,0) \,] = [2 \;\; 2]$.

Logo:

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{f_2((0,0)+h) - f_2(0,0) - B_2 \cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f_2(h_1,h_2) - 0 - [2 \;\; 2] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{h_1^2 + h_2^2 + \cancel{2h_1} + \cancel{2h_2} - \cancel{2h_1} - \cancel{2h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0.$$

Logo f_2 é diferenciável em $(0,0)$ e $B_2 = Df_2(0,0)$

Pelo TEOREMA-4-a, f é diferenciável em $(0,0)$.

Pelo TEOREMA 4-b, $Df(0,0) = \begin{bmatrix} Df_1(0,0) \\ Df_2(0,0) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$