não é vizinhança de $(1,1)$.

DEF: (X,d) métrico. $F \subset X$ é fechado se $X \setminus F$ é aberto.

AULA DO DIA 12/03

Exemplo: Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual e o intervalo $I=[-1,1] \subset \mathbb{R}$. O complementar de I em $\mathbb{R}$ é o conjunto:

$$\mathbb{R} \setminus I = \mathbb{R} \setminus [-1,1] = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

O intervalo $(-\infty,-1)$ é um conjunto aberto, pois se $x \in (-\infty,-1)$, defino $r := -1-x > 0$, logo

$$y \in B_r(x) \Rightarrow x-r < y < x+r \Rightarrow$$

$$x-(-1-x) < y < x+(-1-x) \Rightarrow 1+2x < y < -1 \Rightarrow$$

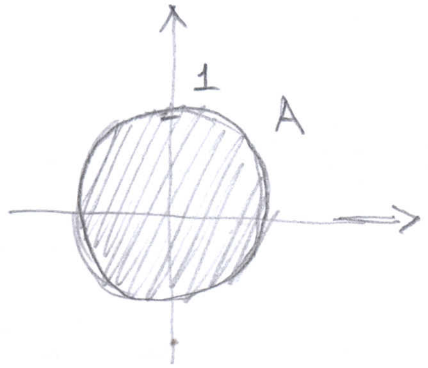
$y \in (-\infty,-1)$. Ptto, $B_r(x) \subset (-\infty,-1)$.

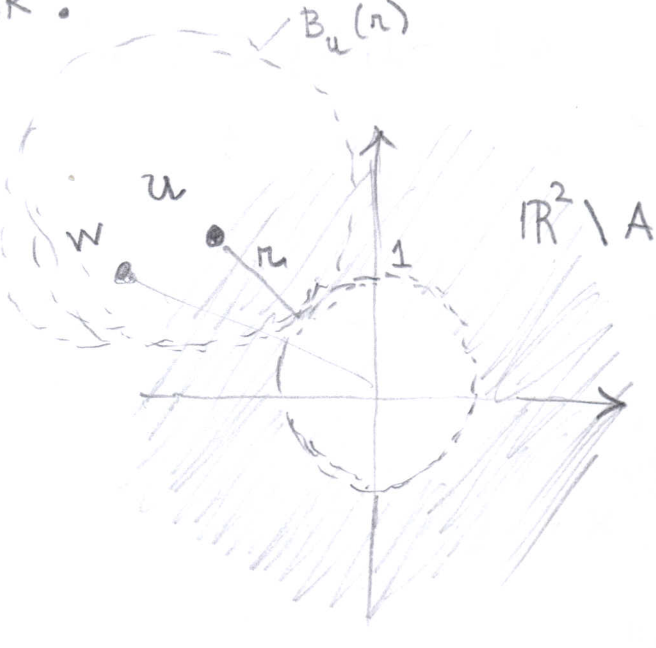
Analogamente $(1,+\infty)$ é um conjunto aberto.

Assim $\mathbb{R} \setminus I$ é união de abertos, e pelo exercício 6 da Lista 1, é um conjunto aberto.

Logo $[-1,1]$ é um conjunto fechado.

Exemplo: Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$.





Vejamos que o complementar de A é um conjunto aberto.

O complementar de A é o conjunto:

$$\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$$

Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, defina $r := x^2+y^2-1$

Afirmo que $B_r(u) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Seja $w \in B_r(u)$. Logo

$$d((0,0), u) \leq d((0,0), w) + d(w,u) \Rightarrow$$

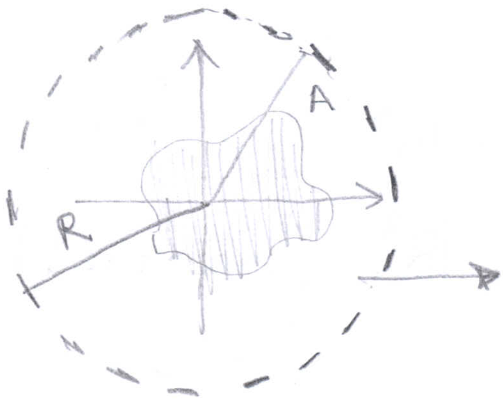
$$d((0,0), u) - d(w,u) \leq d((0,0), w) \Rightarrow$$

$$d((0,0),w) \geq d((0,0),u) - d(w,u)$$
$$> x^2+y^2 - r$$
$$= x^2+y^2-(x^2+y^2-1)$$
$$= x^2+y^2-x^2-y^2+1$$
$$= 1$$

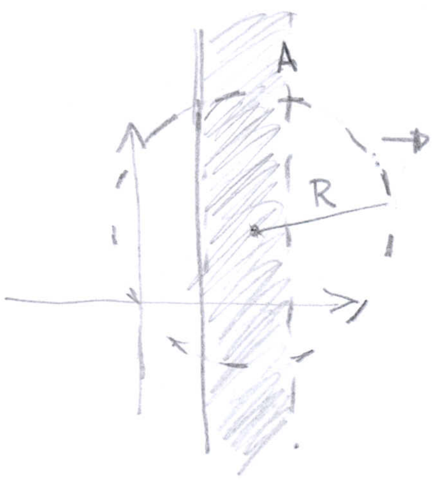
Logo $w \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Daí, $B_r(u) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Ou seja $\mathbb{R}^2 \setminus A$ é um conjunto aberto.

Ptto A é um conjunto fechado.



$R \in \mathbb{R}$ é tal que, $A \subseteq B_R(A)$

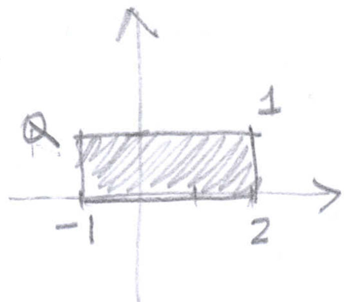


P/ todo $\begin{cases} R \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ temos que

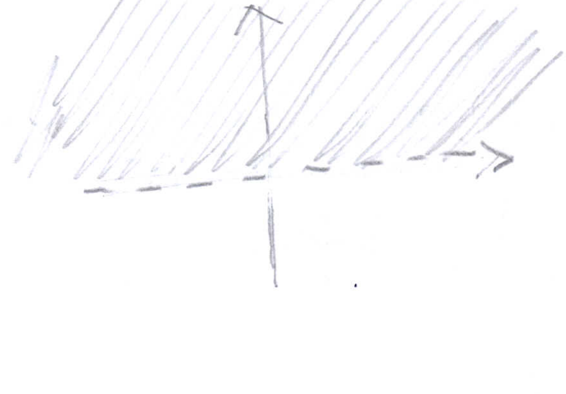
$B_R(x) \not\supset A$.

<u>DEFINIÇÃO 5</u>: Seja (X,d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset X$ é LIMITADO se existir $x \in X$ e $R \geq 0$ tal que $A \subset B_R(x)$.

<u>Exemplo</u>: Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. O retângulo $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. (Verifique!)



<u>Exemplo</u>: O semi-plano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ não é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. (Verifique!)

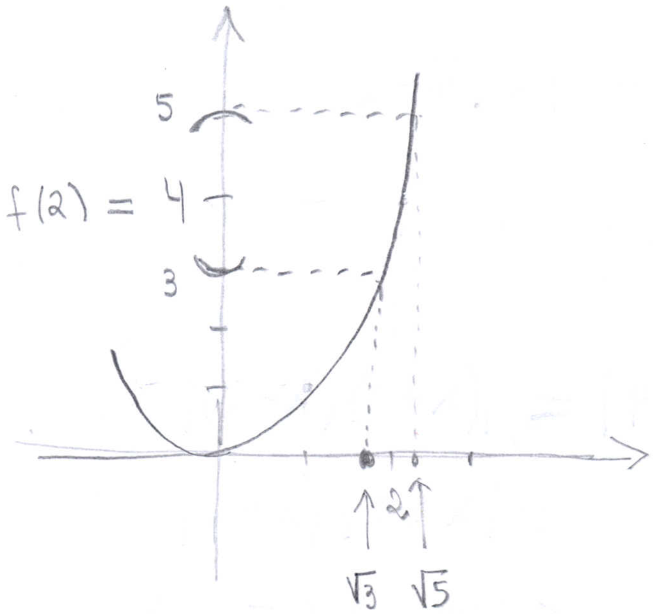


DEFINIÇÃO 6: Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se K é fechado e limitado.

MOTIVAÇÃO P/ DEF. DE FUNÇÃO CONTÍNUA NUM PONTO:

Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual,

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Fixe $x_0 = 2$.



$\sqrt{5} \approx 2{,}2$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$

$2-\sqrt{3} \approx 0{,}3$

$\sqrt{5}-2 \approx 0{,}2$

Dado $\varepsilon = 1$, temos que

$$(f(2)-\varepsilon,\ f(2)+\varepsilon) = (4-1,\ 4+1) = (3,5).$$

Fazendo $\delta = \min\{2-\sqrt{3},\ \sqrt{5}-2\} = \sqrt{5}-2$,

$$(2-\delta,\ 2+\delta) = (2-(\sqrt{5}-2),\ 2+(\sqrt{5}-2))$$
$$= (4-\sqrt{5},\ \sqrt{5})$$

$x \in (4-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \Longrightarrow 4-\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \Longrightarrow$

$2-\sqrt{5} < x-2 < \sqrt{5}-2 \Longrightarrow |x-2| < \sqrt{5}-2$

Por outro lado,

$2-\sqrt{5} < x-2 < \sqrt{5}-2 \Longrightarrow 6-\sqrt{5} < x+2 < \sqrt{5}+2$

$\Longrightarrow |x+2| < \sqrt{5}+2$. Logo:

Sempre que $|x-2| < \sqrt{5}-2$, é verdade que $|x+2| < \sqrt{5}+2$. Assim,

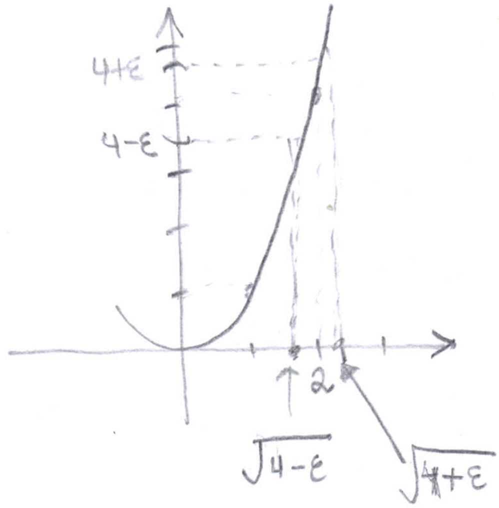
$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| = |x^2-4| &= |(x+2)(x-2)| \\
&= |x+2||x-2| \\
&< (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) \\
&= 5-4 = 1 = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Logo, verificamos que dado $\varepsilon = 1$, tomando $\delta = \sqrt{5}-2$, temos:

$$|x-2| < \sqrt{5}-2 \Longrightarrow |f(x)-f(2)| < \varepsilon$$

AULA DO DIA 14/03/2018

Dado $0 < \varepsilon \leq 4$,



Tome $\delta = \min\left\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\right\} = \sqrt{4+\varepsilon}-2$ (Verificar!)

Se $|x-2| < \delta$, então $|x+2| < 4+\delta$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(2)| = |x^2-4| &= |(x+2)(x-2)| \\
&= |x+2||x-2| \\
&< (4+\delta)\delta \\
&= (4+\sqrt{4+\varepsilon}-2)(\sqrt{4+\varepsilon}-2) \\
&= (\sqrt{4+\varepsilon}+2)(\sqrt{4+\varepsilon}-2) \\
&= 4+\varepsilon-4 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Assim, verificamos que dado $0 < \varepsilon \leq 4$, tomando $\delta = \sqrt{4+\varepsilon}-2$, temos:

$$|x-2| < \sqrt{4+\varepsilon}-2 \implies |f(x)-f(2)| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, se $|x-2| < a$, então $|x+2| < 4+a$. Tomando $\delta = \min\left\{a, \frac{\varepsilon}{4+a}\right\}$, se $|x-2| < \delta$ então,

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |x-2||x+2|$$
$$< |x-2| \cdot (4+a)$$
$$< \frac{\varepsilon}{4+a} \cdot 4+a = \varepsilon.$$

<u>DEFINIÇÃO 7</u>: Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f: X \to Y$ uma função. Dizemos que f é contínua em $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

<u>Exemplo</u>: Considerando $\mathbb{R}$ com a métrica usual a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $x_0 = 2$.

Exemplo: Considere $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ com a métrica usual. A função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2+y^2$ é contínua em $(0,0)$:

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Assim, se

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \|(x,y)\| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow x^2+y^2 < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x^2+y^2-0|}_{\|\ |f(x,y)-f(0,0)|} = |x^2+y^2| = x^2+y^2 < \varepsilon.$$

Exemplo: Se considerarmos no exemplo acima $\mathbb{R}^2$ com a métrica do máximo e $\mathbb{R}$ com a métrica usual, prova-se que $f(x,y) = x^2+y^2$ é contínua em $(0,0)$:

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$. Assim, se

$$\|(x,y) - (0,0)\|_\infty < \delta \Rightarrow \|(x,y)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow$$

$$\max\{|x|, |y|\} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \text{ e } |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \text{ e } 0 < \sqrt{y^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow x^2 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y^2 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |x^2+y^2-0| = x^2+y^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

DIFERENCIABILIDADE

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que A contém uma vizinhança do ponto a. Definimos a derivada de f em a pela equação:

$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

desde que o limite exista. Nesse caso, dizemos que f é DIFERENCIÁVEL em a.

CONSEQUÊNCIAS:

(1) Funções diferenciáveis são contínuas;

(2) Composição de funções diferenciáveis é uma função diferenciável

Objetiva-se definir a derivada de uma função $f: A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

DEFINIÇÃO 8: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ e $f: A \to \mathbb{R}^n$ uma função. Suponha que a contém uma vizinhança de a. Dado $u \in \mathbb{R}^m$ com $u \neq 0$, definimos a DERIVADA DIRECIONAL DE f em a COM RESPEITO AO VETOR u pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

desde que esse limite exista.

OBS: O limite acima depende de a e u.

Exemplo: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$, quando:

i) $\vec{u} = (1,1)$ e $a = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((1,0)+t(1,1)) - f(1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1+t, t) - f(1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^2 + t^2 - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{1} + 2t + t^2 + t^2 - \cancel{1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2t + 2t^2}{t} = \lim_{t \to 0} 2 + 2t = 2$$

ii) $u = (1,0)$ e $a = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((1,0) + t(1,0)) - f(1,0)}{t}$$

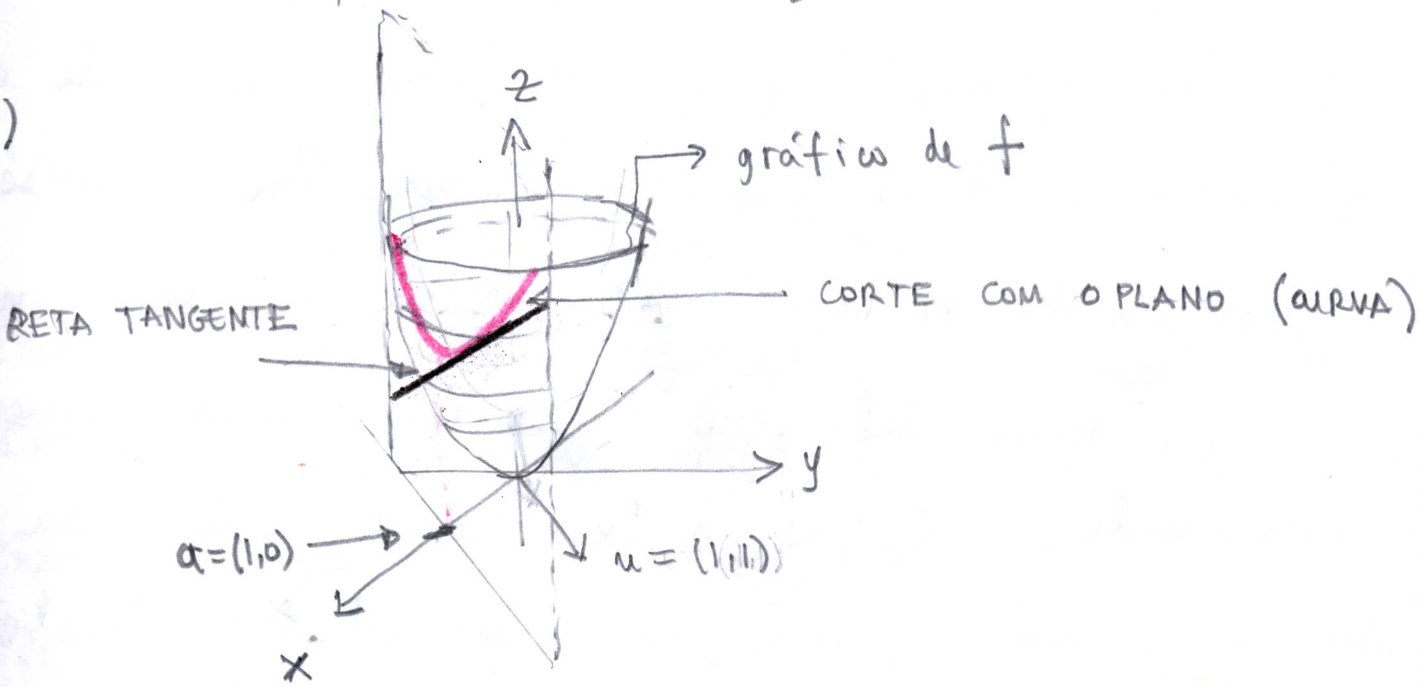
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1+t, 0) - f(1,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^2 + 0^2 - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{1} + 2t + t^2 - \cancel{1}}{t} = \lim_{t \to 0} 2 + t = 2.$$

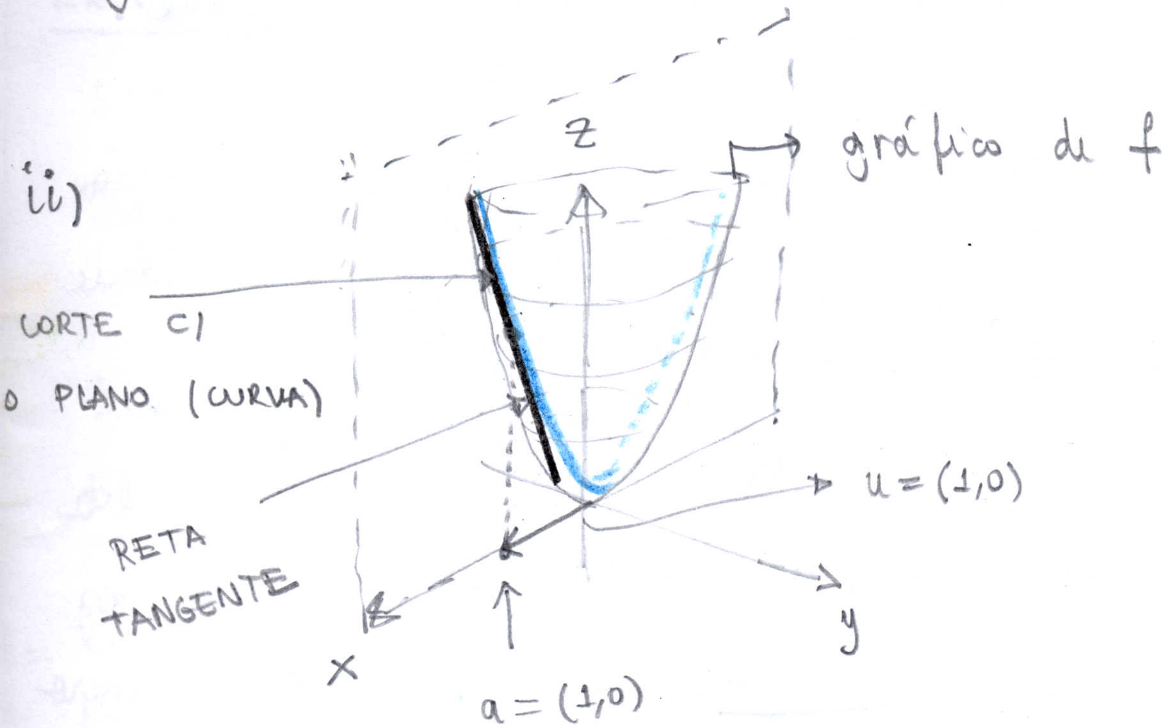
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:

i)



No ponto $a = (1,0)$ o coeficiente angular da reta tangente à curva é igual a 2.

ii)



No ponto $a = (1,0)$ o coeficiente angular da reta tangente à curva é igual a 2.