

AULA DO DIA 18/06/2017

SÉRIES DE POTÊNCIAS

DEFINIÇÃO 8 : Uma série de potências é uma série da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$, onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série.

Obs : A soma de uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ é a função :

$$f(x) = c_0 + c_1 (x-a)^1 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

onde $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$

Exemplo : $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-a)^n$ é a série geométrica.

Se $|x-a| < 1$, ou seja, $a-1 < x < 1+a$, a série converge. Se $|x-a| \geq 1$, a série diverge.

Exemplo: Determinar $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$ é convergente.

Sol:
 $x_n := n! x^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{n! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{|x|^n} \cdot |x|}{\cancel{n!} \cdot \cancel{|x|^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)|x| = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, se $x > 0$ ou $x < 0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$ diverge.

Se $x = 0$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$ converge.

Exemplo: Determine $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge.

Sol:

$$x_n := \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|(x-3)|^{n+1} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{|(x-3)^{-n}}|}{|x-3|^n \cdot \cancel{n}} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} |x-3| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 1/n} \cdot |x-3| = |x-3|$$

Se $|x-3| < 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge absolutamente —
mente;

Se $|x-3| > 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ diverge;

Se $|x-3| = 1$, nada podemos afirmar;

$$|x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Leftrightarrow$$

$$2 < x < 4 \quad |$$

$$|x-3| > 1 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x-3 > 1 & \text{ou} \quad x-3 < -1 \\ x > 4 & \text{ou} \quad x < 2 \end{array} \quad |$$

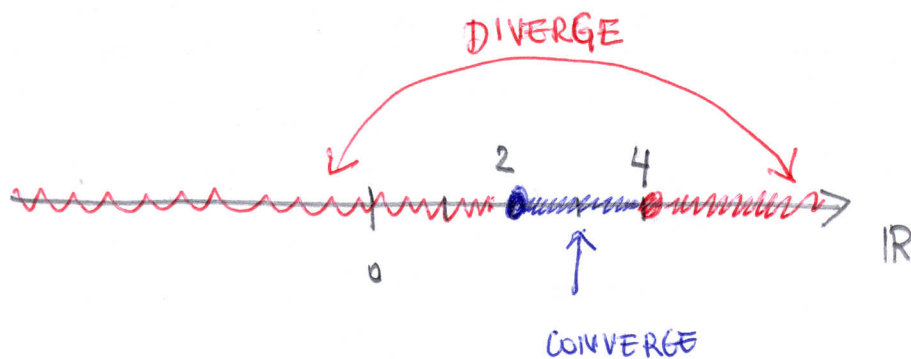
$$|x-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x-3 = 1 & \text{ou} \quad -(x-3) = 1 \\ x = 4 & \text{ou} \quad -x+3 = 1 \\ x = 4 & \text{ou} \quad x = 2 \end{array} \quad |$$

$$\text{Se } x=4, \text{ então } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4-3)^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{série harmônica}) \text{ que é divergente;}$$

$$\text{Se } x=2, \text{ então } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2-3)^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad (\text{série harmônica alternada}) \text{ que converge;}$$



OBS : O intervalo $[2, 4)$ é o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$. O número $R=1$ é o raio de convergência dessa série.

Exemplo : Determinar o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

Sol : $x_n := \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\cancel{(-3)^n} \cdot (-3) \cdot \cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{(-3)^n} \cdot \cancel{x^n}} \right| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3|x| \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3|x| \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3|x| \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = 3|x| \end{aligned}$$

Se $3|x| < 1$, então a série converge absolutamente;

Se $3|x| > 1$, então a série diverge;

Se $3|x| = 1$, nada podemos afirmar.

$$3|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} ;$$

$$3|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \text{ ou } x < -\frac{1}{3} ;$$

$$3|x| = 1 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

Se $x = \frac{1}{3}$ então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} .$$

Como $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona decrescente e

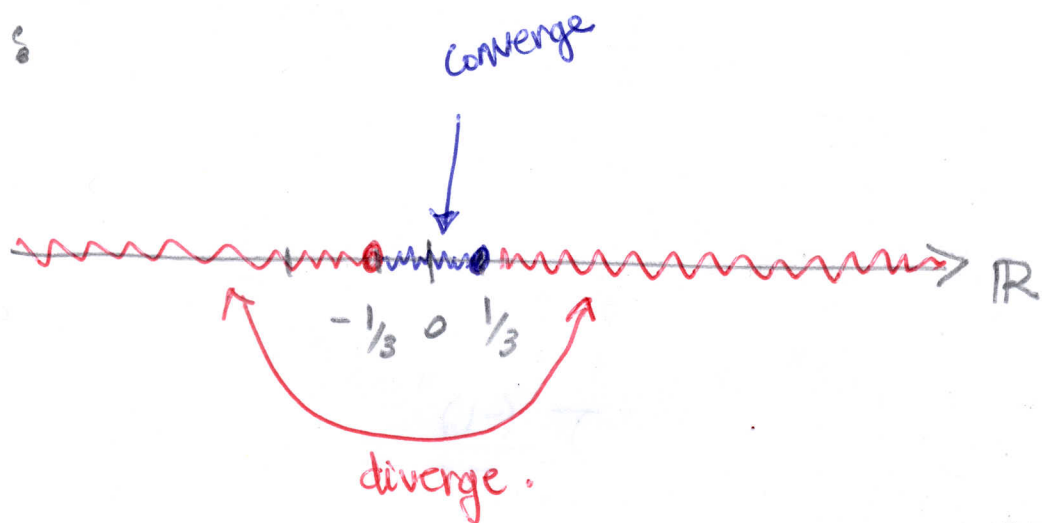
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, o teste da série alternada
nos diz que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ é convergente.

Se $x = -\frac{1}{3}$ então

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{série } p, p = \frac{1}{2} < 1) \end{aligned}$$

que é divergente.

logo :



Raio de convergência $\rightarrow R = \frac{1}{3}$.

DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO TERMO A TERMO :

TEOREMA : Se a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ tiver

raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$$

é diferenciável no intervalo $(a-R, a+R)$ e :

$$a) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\forall x \in (a-R, a+R);$$

$$b) \quad \int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (a-R, a+R)$$

Exemplo : Representar a função $\ln(1-x)$ como uma

série de potências :

Sol :

$$(\ln(1-x))' = \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = (-1) \cdot (\ln(1-x))'$$

Logo,

$$(-1) \ln(1-x) = \int (-1) (\ln(1-x))' dx = \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$= \int \sum_{n=0}^{+\infty} x^n dx$$

$$= \int (1 + x + x^2 + \dots) dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + C$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + C, \quad |x| < 1$$

Fazendo $x=0$,

$$(-1) \ln(1-0) = C \Rightarrow C = (-1) \ln(1) = 0.$$

Logo

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Se $x = \frac{1}{3}$ então

$$\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \cdot n}$$

* FIM *

1)

$$a) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad e \quad 0 \leq a < b \Rightarrow \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1) \cdot b^n$$

Caso $n=1$,

$$\frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b+a < b+b = (1+1)b$$

Caso $n=2$,

$$\begin{array}{r} b^3 - a^3 \quad | \quad b-a \\ -b^3 + b^2a \quad b^2+ba+a^2 \\ \hline b^2a - a^3 \\ -b^2a + ba^2 \\ \hline ba^2 - a^3 \\ -ba^2 + a^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{b^3 - a^3}{b-a} &= b^2 + ba + a^2 \\ &< b^2 + b^2 + b^2 \\ &= (2+1)b^2 \quad // \end{aligned}$$

Caso n qualquer:

$$\begin{aligned} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} &= b^n + b^{n-1}a + \dots + b \cdot a^{n-1} + a^n \\ &= b^n \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + \dots + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^n}{b^n} \right) \end{aligned}$$

$< n \cdot 1$

$$< b^n (1+n) .$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\cancel{(n+1)} \cdot \frac{\cancel{n+1+1}}{\cancel{n+1}} - \cancel{n} \cdot \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}} \right) < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) $0 < a = 1 < 1 + \frac{1}{2n} = b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

substituindo a e b na letra b):

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left((n+1) \cdot 1 - n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right) < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(n+1 - n \cdot \frac{2n+1}{2n} \right) < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(\cancel{n+1} - n - \frac{1}{2} \right) < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < \frac{1}{1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 2^2 = 4, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2n} < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d) Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, então por c) $a_n < 4 \forall n$.

Ptto $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e monótona. Pelo TEO. 3 é convergente.

III)

$$3) \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}$$

$$x_{2n} = -\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = -1$$

$$x_{2n-1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Logo a sequência diverge.

$$7) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$8) \quad a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} = 1$$

$$13) \quad a_n = \frac{2n + \sin n}{5n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + \sin n}{5n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{\sin n}{n}}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{5}$$

$$15) \quad a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$$

$$f(x) = \sqrt[x]{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x^2 + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 + x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + x^2}} = e^0 = 1$$

$$18) a_n = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{-1}$$

$$= e \cdot 1 = e.$$

$$22) a_n = n - n^2 \cdot \sin \frac{1}{n}$$

$$f(x) = x - x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\sin(1/x)}{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin 1/x}{1/x}}{1/x}$$

$$t = \frac{1}{x} \quad = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{\sin t}{t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \sin t}{t^2} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{2} = 0.$$

$$26) \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^2 - 1}{2^2} \right) \cdot \left(\frac{3^2 - 1}{3^2} \right) \cdots \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$29) \quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se $\alpha \leq 0$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}} \cdot \frac{1}{e^n} = 0$

se $\alpha > 0$ então seja $f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k) x^{\alpha-k-1}}{e^x} = 0$$

$$= 0$$

$$31) \quad e^x \geq \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$e^n \geq \frac{n^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{e} \Rightarrow$$

Towards a limit,

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

$$33) \quad a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}} = \frac{1}{e}.$$

VI)

$$3) s_n = \sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln r}$$

Note que $\frac{1}{r} < \frac{1}{\ln r}$, $\forall r > 1$. Logo

$$\underbrace{\sum_{r=3}^n \frac{1}{r}}_{t_n} < \underbrace{\sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln(r)}}_{s_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

Como $t_n \rightarrow +\infty \Rightarrow s_n \rightarrow +\infty$, logo $(s_n)_n$ diverge.

XII)

$$2) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2}$$

comparação do limite com a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\arctg(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2} \cdot \frac{n^2}{1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctg(n) = \frac{\pi}{2} > 0$$

Pelo Teste da comp. do limite, como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, então a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2}$ converge.

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}, \quad \lambda > 0$$

$$x_n := \frac{2^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{2^n}{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \cdot 2}{((n+1) \cdot n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{\cancel{2^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} = 0 < 1$$

Pelo teste da razão, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}, \quad \lambda > 0$

é convergente.

$$9) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)$$

comparação do limite com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad t = 1/x = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2} > 0$$

Pelo Teste da comparação do limite a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \text{ converge.}$$

$$10) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$x_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Pelo Teste da Raiz, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ converge

absolutamente, logo converge.