

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pelo TESTE DA
COMPARAÇÃO DO LIMITE, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ é

divergente.

AULA DO DIA 15/06/2017 (REPOSIÇÃO)

SÉRIES ALTERNADAS

Uma série alternada é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

Por exemplo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ é uma série alternada.

Teste da Série Alternada: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monotona decrescente com $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Então a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x_n$ é convergente.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$;

$x_n := \frac{1}{n}$ é decrescente;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

Então, do TESTE DA SÉRIE ALTERNADA, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ é convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+1}$

$$x_n := \frac{n^2}{n^3+1} \div n^3 = \frac{1/n}{1+1/n^3} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1+1/n^3} = 0$$

$$x_n > 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

x_n é decrescente :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^3+1) \cdot (x^2)' - x^2 (x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^3+1) - x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-x^4 + 2x}{(x^3+1)^2} < 0 ?$$

$$-x^4 + 2x = x(2 - x^3) < 0 \Leftrightarrow \cancel{x < 0} \text{ ou } 2 - x^3 < 0$$

$$2 < x^3 \quad , \quad \text{ou seja} \quad x \in [\sqrt[3]{2}, +\infty)$$

Logo f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0) \cup [\sqrt[3]{2}, +\infty)$

Assim x_n é decrescente p/ $n \geq 2$.

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{3} > \text{logo } x_1 > x_2.$$

Ptto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente. Pelo TESTE DA SÉRIE ALTERNADA $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^3+1}$ é convergente.

DEFINIÇÃO 6 : Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ é convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ é absolutamente convergente

pois $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ que é a série p, $p=4$.

logo convergente.

TEOREMA 7 : Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$:

$$|\sin 4n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{|\sin 4n|}{4^n} \leq \frac{1}{4^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin 4n}{4^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}}_{\text{série geométrica}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

série geométrica
 $|r| = \frac{1}{4} < 1$,
 logo convergente.

Pelo TEO. 6 - a, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin 4n}{4^n} \right|$ é convergente, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$ é absolutamente convergente e pelo TEO. 7,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 4n}{4^n} \text{ é convergente.}$$

A recíproca do TEO. 7 não é verdadeira:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ é convergente, mas não é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{série harmônica})$$

divergente.

DEFINIÇÃO 7 : Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é condicionalmente convergente se for convergente mas não for absolutamente convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ é condicionalmente convergente.

3º CRITÉRIO : O TESTE DA RAZÃO

TEOREMA 8 :

a) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = L < 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente;

b) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = L > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é divergente;

c) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$ nada podemos concluir.

Demonstração :

a) Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = L$, então dados $\varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal

$$\left| \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| - L \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que } n \geq n_0$$

ou seja,

$$- \varepsilon + L < \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \varepsilon + L, \quad \forall n \geq n_0$$

logo

$$|x_{n+1}| < (\varepsilon + L) |x_n|, \quad \forall n \geq n_0.$$

Escolho $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$ (Isso é possível pois $L < 1$).

Assim,

$$\begin{aligned} |x_{n+2}| &< (\varepsilon + L) |x_{n+1}| < (\varepsilon + L)^2 |x_n| \\ |x_{n+3}| &< (\varepsilon + L) |x_{n+2}| < (\varepsilon + L)^3 |x_n| \\ &\vdots \\ |x_{n+k}| &< \dots < (\varepsilon + L)^k |x_n| \end{aligned}$$

Com isso,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n+k}| < \sum_{k=1}^{+\infty} (\varepsilon+1)^k \underbrace{|x_n|}_{= |x_n|} = |x_n| \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (\varepsilon+1)^k}_{\text{série geométrica}} \\ \text{c/ } \varepsilon+1 < 1 \\ \text{que é conv.}$$

Pelo TBO b-a, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n+k}|$ é convergente.

$$\text{Mas } \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n+k}|, \text{ logo } \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| \text{ é}$$

convergente, daí, $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ é convergente. Pto,

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente,

b) É exercício.

c): Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$:

1º caso:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1;$$

2º caso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 1$$

Isso exemplifica o item c) do teorema anterior. Duas séries tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = 1$ onde uma diverge e a outra converge.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} n!} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1. \text{ Logo pelo}$$

Teorema 8-b a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ é divergente.

4º CRITÉRIO : O TESTE DA RAÍZ

TEOREMA 9 :

a) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente;

b) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge;

c) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$ nada podemos concluir.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$

$$x_n := \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1} \right)^n$ é absolutamente convergente e

pelo TEOREMA 7, é convergente.

Exemplos: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

$$x_n = \frac{(-10)^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(-10)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-10)^n}{n!}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-10) \cdot \cancel{(-10)^n}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(-10)^n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-10}{n+1} = 0 < 1. \text{ Pto a série}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$ é absolutamente convergente, e pelo

TEOREMA 7 é convergente.

Exemplos: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctg(n))^n}$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{(\arctg n)^n}$$

$$|x_n| = \left(\frac{1}{\arctg(n)} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\arctg(n)} = \frac{2}{\pi} < 1, \text{ pto a}$$

série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctg(n))^n}$ é absolutamente convergente.