

AULA DO DIA 11/06/2018
CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

1º CRITÉRIO : O TESTE DA INTEGRAL.

TEOREMA 5 : Seja $f = f(x)$ uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty)$, e $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência definida por $x_n := f(n)$.

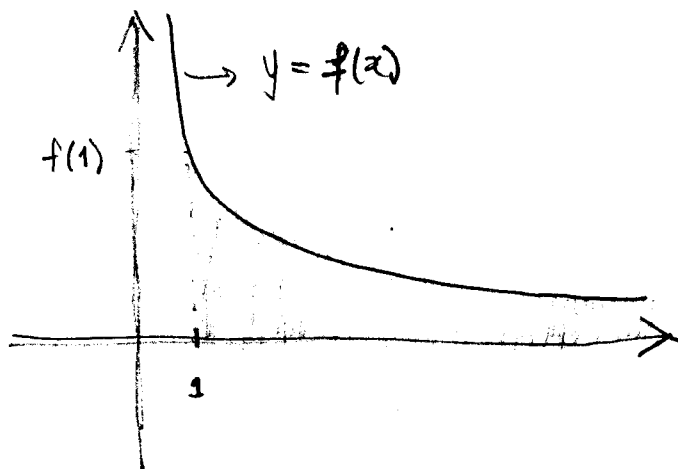
A série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente se, e somente se,

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ é convergente.

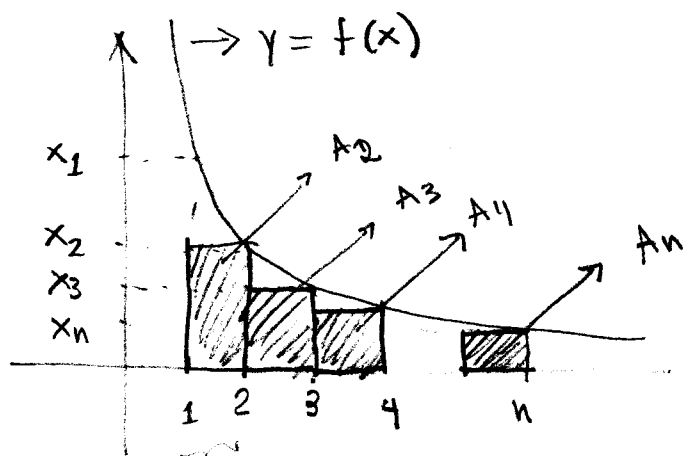
Demonstração :

Suponha que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ é convergente. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx = L < \infty.$$



A sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $x_n = f(n)$.



Como f é decrescente, a área dos retângulos acima é menor ou igual a integral definida em seus respectivos intervalos.

$$A_2 = (2-1) \cdot f(2) = x_2$$

$$A_3 = (3-2) \cdot f(3) = x_3$$

⋮

$$A_n = (n - (n-1)) f(n) = x_n$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \dots + x_n &= A_2 + A_3 + \dots + A_n \\ &\leq \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &= \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $f \geq 0$

Por tanto,

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\leq x_1 + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$$= x_1 + L := M$$

Isso significa que a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente. Além disso,

$$s_{n+1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$$

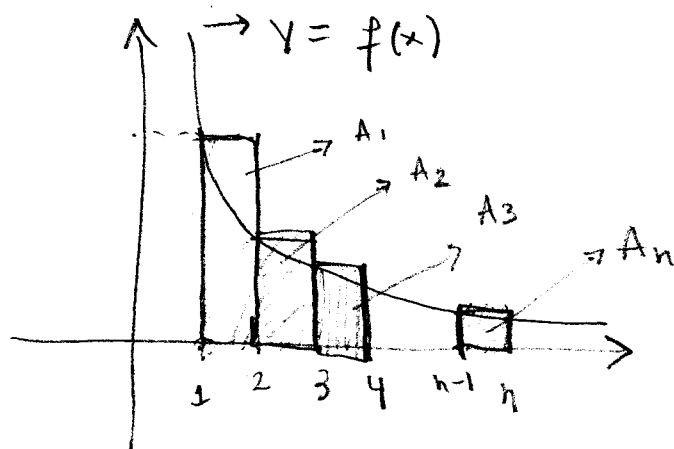
$$= s_n + \underbrace{x_{n+1}}_{>0} > s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dá $(s_n)_n$ é crescente. Pelo TEOREMA 3, $(s_n)_n$ é convergente, ou seja, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente.

Agora, suponha que $\int_1^{\infty} f(x) dx$ é divergente.

Como $f(x) \geq 0$, então

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx = +\infty$$



Note que a integral de $f(x)$ de 1 a n é menor ou igual à soma das áreas dos retângulos acima

$$A_1 = (2-1) \cdot f(1) = f(1) = x_1$$

$$A_2 = (3-2) \cdot f(2) = f(2) = x_2$$

...

$$A_n = (n - (n-1)) \cdot f(n-1) = f(n-1) = x_{n-1}$$

Quer dizer

$$\int_1^n f(x) dx \leq x_1 + \dots + x_{n-1} = \sum_{n=1}^{n-1} x_n$$

Logo

$$+\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$$

Portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = +\infty$, ou seja, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é divergente.

Exemplo : Dado $p \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é chamada de SÉRIE p.

Se $p < 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-p} = +\infty. \text{ Pelo Teo 7}$$

REMA 4, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente.

Se $p = 0$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$. Também

pelo Teo 4, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente.

Se $p > 0$, então $f(x) = \frac{1}{x^p}$ é contínua e positiva. Pelo teste da derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^p \cdot 1' - 1 \cdot (x^p)'}{(x^p)^2} \\ &= \frac{-p \cdot x^{p-1}}{(x^p)^2} < 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Logo f é decrescente. Quer dizer,

f é cont, posit. e decrescente em $[1, +\infty)$.

Pelo TEOREMA 5,

$$\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \text{ é convergente } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ é convergente.}$$

Ou seja, nesse caso ($p > 0$) basta analisar a convergência da integral imprópria.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx$$

Se $p > 1$ então $-p < -1$, logo $1-p < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Daí, } \int_1^t \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^t x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^t \\ &= \frac{1}{-p+1} (t^{-p+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} (t^{-p+1} - 1) \\ &= \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

Se $p = 1$ então

$$\int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t$$

Dai, t

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

Se $0 < p < 1$, então $1-p > 0$. Logo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{-p+1} (t^{-p+1} - 1) = +\infty.$$

Portanto, a série p é:

$$\begin{cases} \text{convergente, se } p > 1; \\ \text{divergente, se } p \leq 1. \end{cases}$$

Exemplo: A série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é uma série p

para $p = 1$. Logo, do TESTE DA INTEGRAL, é

divergente. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é a série p , $p = \frac{1}{2} < 1$

logo divergente. Já a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ é a série p , $p = 4 > 1$ pto convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

$$f(x) := \frac{1}{x^2+1}, \quad x_n = f(n),$$

Verifique que f é contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty)$. Logo,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg(x) \Big|_1^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg(t) - \arctg(1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Deo TEOREMA 5, a série

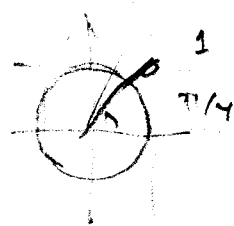
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ é convergente.}$$

$$x = \operatorname{tg} u$$

$$dx = \sec^2 u \, du$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{\sec^2 u \, du}{\sec^2 u}$$

$$= u = \arctg(x)$$



Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} :$

$$f(x) := \frac{\ln x}{x}, \quad x_n = f(n);$$

f é contínua e positiva p/ $x > 1$;

$$f'(x) = \frac{x \cdot (\ln x)' - (\ln x) \cdot x'}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{(\ln x)^2} > 0$$

$f'(x) < 0$ quando $1 - \ln(x) < 0$,

$$1 < \ln(x)$$

$$e < e^{\ln(x)} = x$$

Agora podemos aplicar o TESTE DA INTEGRAL
no intervalo $[e, +\infty)$:

$$\int_e^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_e^t \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{(\ln(x))^2}{2} \right|_e^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = +\infty.$$

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$\int u du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ é divergente.

ESTIMATIVA PARA A SOMA DE UMA SÉRIE :

Suponha que $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência dada por $x_n := f(n)$, para alguma função f contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty)$ e que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente. Se $R_n = s - s_n$ então

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Exemplo: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente, pois é a série p , $p = 3 > 1$. Vamos aproximar a soma s da série usando a soma dos 10 primeiros termos:

$f(x) = \frac{1}{x^3}$, contínua, positiva e decrescente em $[1, +\infty)$.

$$\int_n^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_n^t \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right|_n^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{-2x^2} \right|_n^t = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2n^2}$$

$$s_{10} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{10^3} \approx 1,19$$

$$R_{10} = s - s_{10} \quad \text{Logo,}$$

$$s_{10} + \int_{11}^{+\infty} f(x) dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^{+\infty} f(x) dx$$

$$1,19 + \frac{1}{2 \cdot 11^2} \leq s \leq 1,19 + \frac{1}{2 \cdot 10^2}$$

AULA DO DIA 13/06/2018

2º CRITÉRIO : TESTE DA COMPARAÇÃO

TEOREMA 6 : Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ séries com ter-

mos positivos,

a) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ é convergente e $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

então $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente;

b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ é divergente e $y_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$,

então $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é divergente.

Demonstração : Considere s_n e t_n as somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, respectivamente,

Como $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, então $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências crescentes.

a) Como $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ é convergente, então $t_n \rightarrow t < \infty$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim $t_n \leq t, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dai :

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n = t_n \leq t$$

Logo $s_n \leq t, \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada. Pelo TEOREMA 3, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ é divergente $\Rightarrow t_n \rightarrow \infty$ ($(t_n)_n$ é crescente)

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n = t_n$$

Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty$, e portanto $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é divergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+1}$ é convergente :

Note que $\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$ (VERIFIQUE).

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (SÉRIE P, $p=2$)

Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+1}$ é convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$\ln(n) > 1 \quad \forall n \geq 3 \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}_{\text{SÉRIE HARMÔNICA}} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

série harmônica
que é divergente

Deb TEOREMA 6 - b, temos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ é divergente.

TESTE DA COMPARAÇÃO DO LIMITE : Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ sejam séries de termos positivos.

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Demonstração : Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = c > 0$, então

pl todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - c \right| < \varepsilon, \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$c - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon + c, \quad \forall n \geq n_0$$

$$(c - \varepsilon) \cdot y_n < x_n < (\varepsilon + c) \cdot y_n, \quad \forall n \geq n_0$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (\varepsilon + c) y_n$ conver-

ge (Prop. de séries c), Pelo TEOREMA 6-a,

$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (c - \varepsilon) y_n$ diverge.

Logo, TEOREMA 6-b, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{5+2n}{(1+n^2)^2}}_{x_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+2n}{1+n^2+n^4}$

Considere $y_n := \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$ e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ (série } p, p=3).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5+2n}{1+n^2+n^4}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + 2n^4}{1+n^2+n^4} \stackrel{\div n^4}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5/n + 2}{1/n^2 + 1/n^2 + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5/n + 2}{1/n^2 + 1/n^2 + 1} = 2 > 0. \text{ Como a série}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ é convergente (série } p, p=3), \text{ então}$$

pelos TESTES DA COMPARAÇÃO DO LIMITE a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2} \text{ é convergente.}$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n \text{ vezes}}} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = \frac{2}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pois é a série p ,

$p=2$, pelo TEOREMA 6 - a, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ é convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$:

$$2^n \leq n \cdot 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\substack{\text{série geométrica} \\ |r| < 1}} \rightarrow \text{série convergente}$$

Pelo TEOREMA 6-a, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ é convergente.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$$

$$y_n = \sqrt[3]{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} \cdot n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{1}}}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}^{\frac{1}{1}} \cdot n^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}} = 1 > 0$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pelo TESTE DA
COMPARAÇÃO DO LIMITE, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ é

divergente.