

AULA DO DIA 04/05/2018.

Exemplo :

1 - A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$x_n := n^2 + n + 1$ é divergente pois

$x_n = f(n)$ onde $f(x) = x^2 + x + 1$.

Como , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, então pelo TEOREMA 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty .$$

Logo $x_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Por isso $(x_n)_n$ é divergente.

2- A sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, como visto anteriormente.

PROPRIEDADES DO LIMITE :

Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências convergentes.

Então :

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot x_n = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n ;$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n ;$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} , \text{ se } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^p , \text{ se } p \in \mathbb{R}, p > 0 \\ \text{e } x_n > 0 .$$

f) Se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência com
 $x_n \leq z_n \leq y_n$, para $n \geq n_0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$.

TEOREMA 2: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstração: É exercício.

Exemplos: Calcule o limite das sequências:

①- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

SOLUÇÃO: $x_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2} = \frac{\cancel{n^2} \left(\frac{3}{n^2} + 5 \right)}{\cancel{n^2} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)} = \frac{\frac{3}{n^2} + 5}{\frac{1}{n} + 1}$

Como,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + 5 = 5$, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$

onde $f(x) = \frac{3}{n^2} + 5$

e

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \neq 0$

onde $g(x) = \frac{1}{x} + 1$

então, por (d),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^2} + 5}{\frac{1}{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{1} = 5.$$

Ou seja, $x_n \rightarrow 5$ quando $n \rightarrow \infty$.

2) - $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2 + 1}$

SOLUÇÃO:

$$|x_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2 + 1} \right| = \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 1/n^2}$$

Como,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ onde}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \text{ pois } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \neq 0 \text{ onde}$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

então por (d):

TEOREMA 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + 1/n^2} \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Pelo TEOREMA 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

OBSERVAÇÃO[~]: Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $|x_n| \rightarrow L \neq 0$ quando $n \rightarrow \infty$, nem sempre é verdade que $x_n \rightarrow L$, quando $n \rightarrow \infty$.

Por exemplo,

considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência definida por $x_n = (-1)^n$.

Logo $|x_n| = |(-1)^n| = 1$. Ou seja, $|x_n| \rightarrow 1$

quando $n \rightarrow \infty$, no entanto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ não existe.

③ - $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

SOLUÇÃO[~]: Não podemos associar a sequência $n!$ a uma função real $f(x)$ já que $x!$ não está definido em $\mathbb{R}$.

$$x_1 = \frac{1!}{1^1} = 1$$

$$x_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} \right) < 1$$

$$x_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} \right) < 1$$

$$x_4 = \frac{4!}{4^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} \right) < 1$$

⋮

$$x_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \right) < 1$$

Logo,

$$0 < x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \right) \leq \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, e $0 < x_n \leq \frac{1}{n}$ então

por (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$

DEFINIÇÃO 3: Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

a) crescente se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) decrescente se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

c) monótona se $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ou $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exemplos:

① A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = \frac{1}{2n+3}$ é decrescente.

SOLUÇÃO: Devemos verificar que,

$$x_n > x_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, que

$$\frac{1}{2n+3} > \frac{1}{2(n+1)+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que,

$$\frac{1}{2n+3} > \frac{1}{2(n+1)+3}, \Leftrightarrow 2(n+1)+3 > 2n+3, \forall n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow 2n+2+3 > 2n+3, \forall n$$

$$\Leftrightarrow 5 > 3 \text{ (sentença verdadeira)}$$

Logo a afirmação

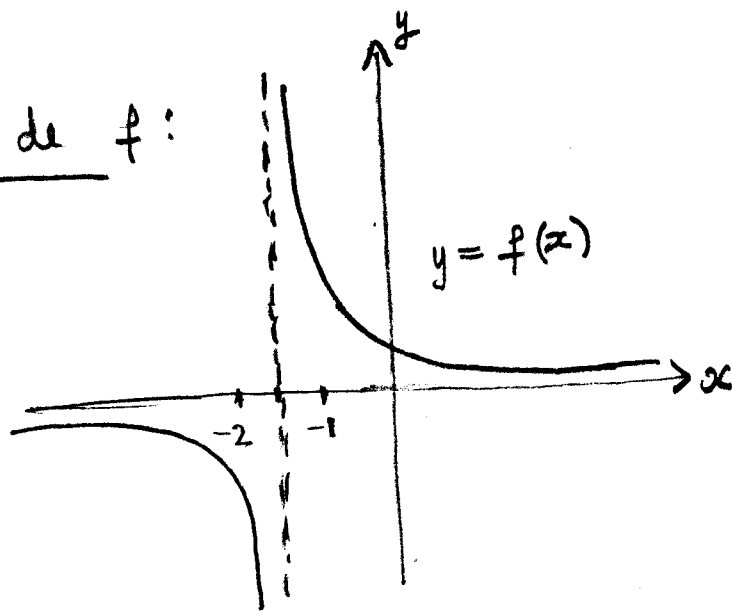
$$\frac{1}{2n+3} > \frac{1}{2(n+1)+3}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ é verdadeira.}$$

Portanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente.

Uma outra maneira de verificar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente é fazer a associação:

$$x_n = f(n), \text{ onde } f(x) = \frac{1}{2x+3}, x \in \mathbb{R}.$$

Gráfico de f :



O gráfico de f sugere que f é decrescente,
vejamos:

$$f'(x) = \frac{(2x+3) \cdot 1' - 1 \cdot (2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{-2}{(2x+3)^2} < 0$$

Logo $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Ou seja
 f é uma função decrescente. Em particular
 f é decrescente $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é
decrescente.

DEFINIÇÃO 4: Uma sequência de números reais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

(i) LIMITADA SUPERIORMENTE, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(ii) LIMITADA INFERIORMENTE, se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

(iii) LIMITADA, se é limitada inferiormente e superiormente.

EXEMPLOS :

① A sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x(n) = n$ é limitada inferiormente por qualquer número real menor do que zero. Porém, essa sequência não é limitada superiormente;

② A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n = \frac{n}{n+1}$ é limitada:

$$0 < n < n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$0 < x_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

③ A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = (-1)^n$ é limitada mas não é convergente.

TEOREMA 3: Toda sequência limitada e monótona é convergente.

SEQUÊNCIA DEFINIDA POR UMA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA:

Considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Essa sequência é definida por uma relação de recorrência, ou seja, seu n -ésimo termo depende do $n-1$ -ésimo termo.

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{1} = 2$$

$$x_3 = 3 - \frac{1}{x_2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\vdots$

1º: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente.

Para verificar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, devemos mostrar que $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Faremos isso por indução sobre $\mathbb{N}$:

$$\boxed{n=1}$$

$$x_1 = 1 < 2 = x_2 ; \quad (\text{VERDADEIRO})$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Suponha que a propriedade é válida p/ $n = k$. Ou seja, que

$$x_k < x_{k+1} \text{ , seja verdade}$$

Verifiquemos que é válida quando $n = k+1$:

$$0 < x_k < x_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{x_k} > \frac{1}{x_{k+1}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x_k} < -\frac{1}{x_{k+1}} \Rightarrow 3 - \frac{1}{x_k} < 3 - \frac{1}{x_{k+1}} \Rightarrow$$

$x_{k+1} < x_{k+2}$. Logo a propo é válida p/ $n = k+1$ e assim é válida p/ todo $n \in \mathbb{N}$.
Isso significa que $(x_n)_n$ é crescente.

$$\underline{2^\circ}: x_n < 3, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\boxed{n=1} : x_1 = 1 < 3 ;$$

Supõe que $x_k < 3$, vamos verificar que $x_{k+1} < 3$:

$$0 < x_k < 3 \Rightarrow \frac{1}{x_k} > \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{x_k} < -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$3 - \frac{1}{x_k} < 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} < \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow x_{k+1} < 3.$$

AULA DO DIA 06/05/2018
Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e crescente. Pelo TEOREMA 3, (x_n) é convergente. Vamos buscar o limite L de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L \neq 0$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}$$

$$= 3 - \frac{1}{L} \Rightarrow L = 3 - \frac{1}{L}$$

$$L = \frac{3L - 1}{L} \Rightarrow L^2 - 3L + 1 = 0$$

$$L = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$L = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Note que $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$. Logo $L = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ é o

limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

SÉRIES

DEFINIÇÃO 5: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. A soma

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

é denominada série, e é denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, formamos uma nova sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$s_1 = x_1;$$

$$s_2 = x_1 + x_2;$$

⋮

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Os números s_n , $n \in \mathbb{N}$ chamam-se as SOMAS PARCIAIS da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. A parcela x_n é

O TERMO GERAL DA SÉRIE.

Se o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s < \infty$ dissermos que

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, e s será chamado a

soma da série. Do contrário, dissermos que

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

EXEMPLO: Sejam $r \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência
 $x_n := r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ é chamada
de série geométrica. Sua convergência depende
do valor fixado r :

Se $r = 0$ então $s = 1$ (conv. $0^0 = 1$)

Se $r = 1$ então

$$s_n = r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-vezes}} = n \cdot 1$$

$$\text{Logo, } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

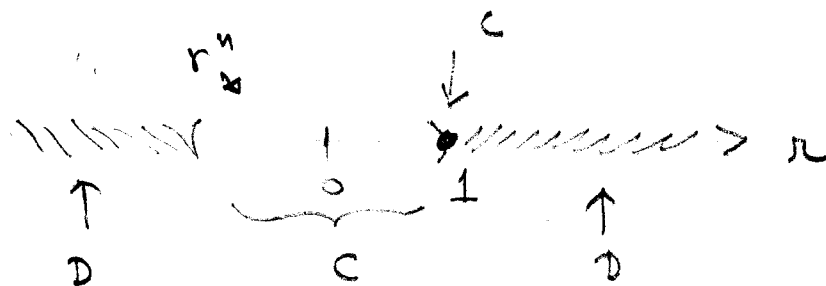
Se $r \neq 1$ então

$$\begin{aligned} s_n - r s_n &= (1 + r + \dots + r^{n-1}) - (r + r^2 + \dots + r^n) \\ &= 1 - r^n \end{aligned} \quad \text{Daí,}$$

$$s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Pelo exercício 4 da L4, temos que

$$\begin{cases} r^n \rightarrow 0 & \text{se } |r| < 1 \\ r^n \rightarrow 1 & \text{se } r = 1 \\ r^n \text{ diverge} & \text{se } |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{cases}$$



Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{se } |r| < 1 \\ \text{diverge}, & \text{se } |r| > 1 \text{ ou } r = -1 \end{cases}$$

Portanto a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ é:

$$\begin{cases} \text{convergente}, & \text{se } |r| < 1 \\ \text{divergente}, & \text{se } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Vamos escrever o termo geral da série
com frações parciais:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \\
 &= \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \\
 &= \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

Para ser válida essa igualdade devemos ter

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{B=-1}$$

Logo,
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Com isso,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

A n -ésima soma parcial dessa série é:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1 //$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e

sua soma $S = 1$.

Exemplo : A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é chamada de série

harmônica. Verifiquemos que ela é divergente :

Para isso, vamos estudar as n -ésimas parcelas parciais, para $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$s_{2^0} = s_1 = 1 = 1 + \frac{0}{2}$$

$$s_{2^1} = s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_{2^2} = s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$s_{2^3} = s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

Isso nos faz pensar que $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Veremos :

A propriedade é válida para $n=1$.

Suponha que a propriedade seja válida $\forall n \in \mathbb{N}$,
ou seja que $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ provaremos que
é válida $\forall n+1$:

$$s_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{j} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{K} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\stackrel{HI}{\geq} 1 + \frac{n}{2} + \left(\frac{1}{K} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$> 1 + \frac{n}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{2^n \text{ vezes}}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2} //$$

Portanto $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{n}{2} = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2^n} = +\infty$

Por isso, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

TEOREMA 4: Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente

então $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Demonstração: Podemos escrever o n -ésimo termo

$x_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é convergente

a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, ou seja,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s < \infty$. Isso implica que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = s$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - s_{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0.$$

A recíproca do TEOREMA 4 não é verdadeira.

Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Então } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$

O termo geral de uma série é $x_n = \frac{n^3}{n^3+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1 \neq 0$

Pela contrapositiva do TEOREMA 4 a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$ não é convergente.

Propriedades das séries :

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ são séries convergentes então

$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - y_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} c x_n$ (c constante real)

são séries convergentes e :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n - \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot x_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{9^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \quad (c) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$$= 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{36}{5}$$

série
geométrica
p/ $|r| < 1$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{9^{n-1}}$ é convergente.

Exemplo : Escreva o número $0, \overline{73}$ como uma razão de números inteiros.

$$0, \overline{73} = 0,737373 \dots$$

$$= 0,73 + 0,0073 + 0,000073 + \dots$$

$$= \frac{73}{10^2} + \frac{73}{10^4} + \frac{73}{10^6} + \dots$$

$$= \frac{73}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

$$= \frac{73}{10^2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$$

série geométrica

p/ $|r| < 1$

$$= \frac{73}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{73}{10^2 - 1}$$

Exemplo : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n} \right)$

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ como visto anteriormente, logo

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} \stackrel{(c)}{=} 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \cdot 1 = 2.$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$ Logo,

série
geométrica
 $|r| < 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Portanto, pelas propriedades de séries, temos

que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n} \right)$ é convergente e

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{3^n} \right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$