AULA DO DIA 23/05/2018

Nesta parte do curso estudaremos as sequências e séries de números reais.

Obs: As definições e os teoremas receberão nova enumeração.

DEFINIÇÃO 1: Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa cada $n \in \mathbb{N}$ a um número real $x(n)$, chamado n-ésimo termo da sequência.

NOTAÇÃO: Iremos representar o n-ésimo termo da sequência x, por x_n, ou seja,

$x(n) := x_n$.

REPRESENTAÇÃO: Indicaremos a sequência $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, ou simplesmente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

CUIDADO! Não confunda a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Por exemplo, a sequência $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $x(n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$.

$(1, 1, \dots, 1, \dots)$ ñ é o mesmo que $\{1\}$.

As sequências podem ser definidas de diversas formas. Por exemplo:

a) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n := \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e

$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dots\right)$ indicam a mesma sequência.

Exemplo: Vamos encontrar uma fórmula para as sequências a seguir:

1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$

Note que os termos no numerador são potências de 2. Logo, outra manéira de representação dessa sequênciá é:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad , \quad x_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad e$$

$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x(n) := \dfrac{1}{2^n}$

2) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \dots\right)$

POSIÇÃO

<u>numerador</u>:

$$3 = 1 + 2$$
$$-4 = -(2 + 2)$$
$$5 = (3 + 2)$$

→ se repete

Logo o numerador do n-ésimo termo é $(-1)^{n-1} \cdot (n+2)$.

<u>denominador</u>: são potências de 5.

Logo o denominador do n-ésino termo é 5^n

Assim, outra representação dessa sequência é:

$$\left((-1)^{n-1} \cdot \frac{(n+2)}{5^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$x_n := (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n+2)}{5^n} , \quad n \in \mathbb{N}$$

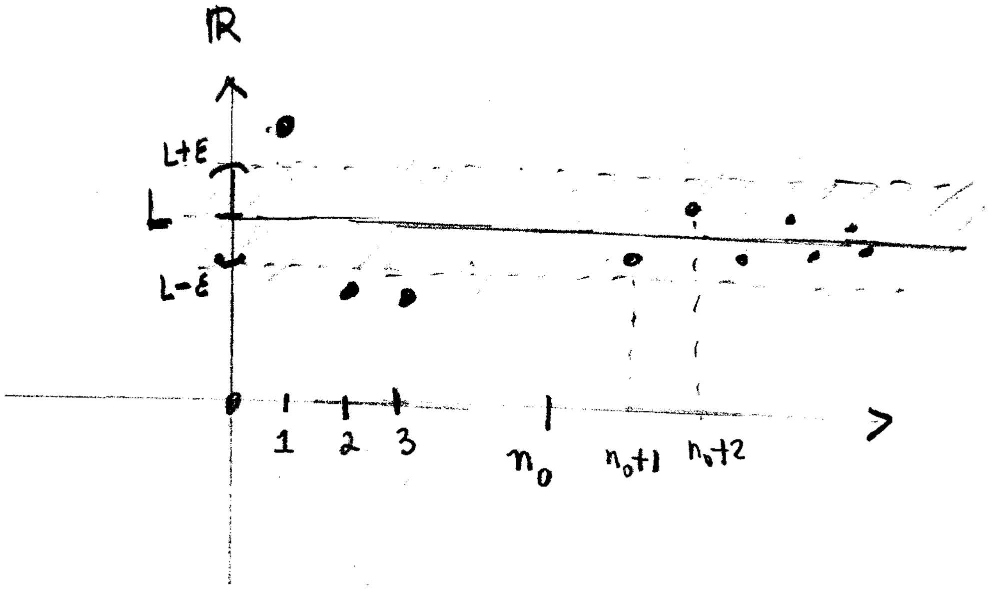
$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $x(n) := (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n+2)}{5^n}$.

DEFINIÇÃO 2: Dizemos que o número real L é limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quando $\forall \, \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$.

NOTAÇÃO: Quando o limite L existe, escrevemos

$$L = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA :



Nos termos da definição 2, n_0 depende da escolha de $\varepsilon > 0$.

Exemplo: Considere a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Podemos representar a sequência da seguinte maneira:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right).$$

Veja que:

$n = 100 \qquad x_n = \frac{100}{101} \approx 0{,}99009\dots$

$n = 10000 \qquad x_n = \frac{10.000}{10.001} \approx 0{,}99990000 9\dots$

Isso indica que quando $n \to \infty$, $x_n \to 1$.

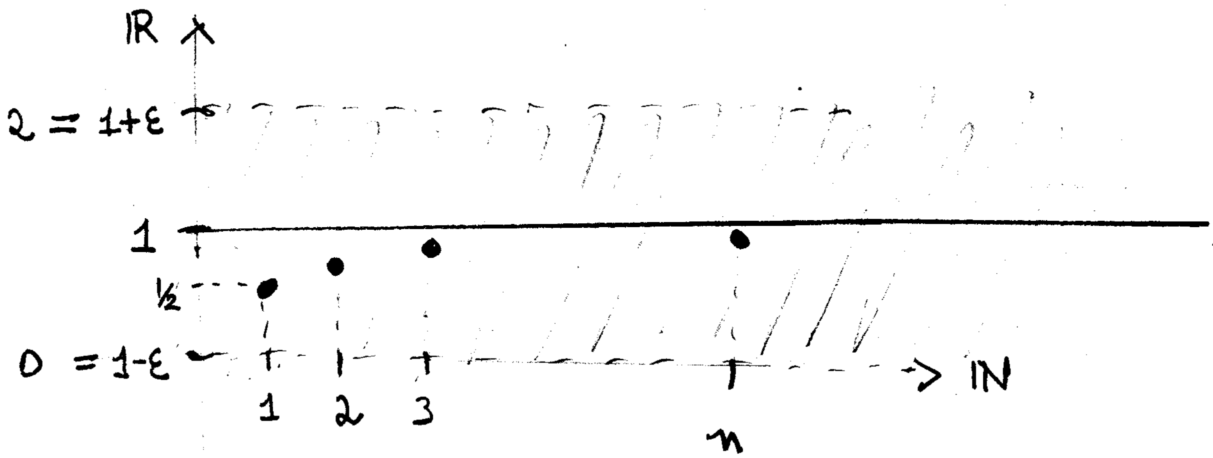
$\underline{\underline{\varepsilon = 1}}$, tomo $n_0 := 1$, pois para todo $n > n_0 = 1$, temos que

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n - n - 1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < 1 = \varepsilon$$

Ou seja, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 := 1$, tal que

$$|x_n - 1| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > 1.$$

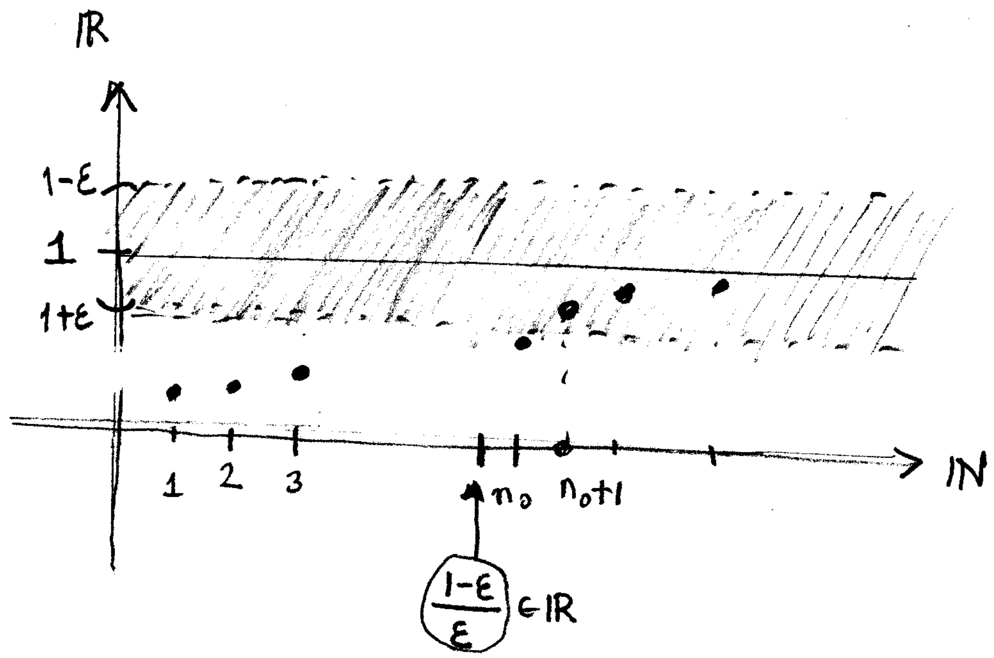
No gráfico:



Para $0 < \varepsilon < 1$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, pois se $n > n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, então $n\varepsilon > 1 - \varepsilon$, ou seja, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Logo,

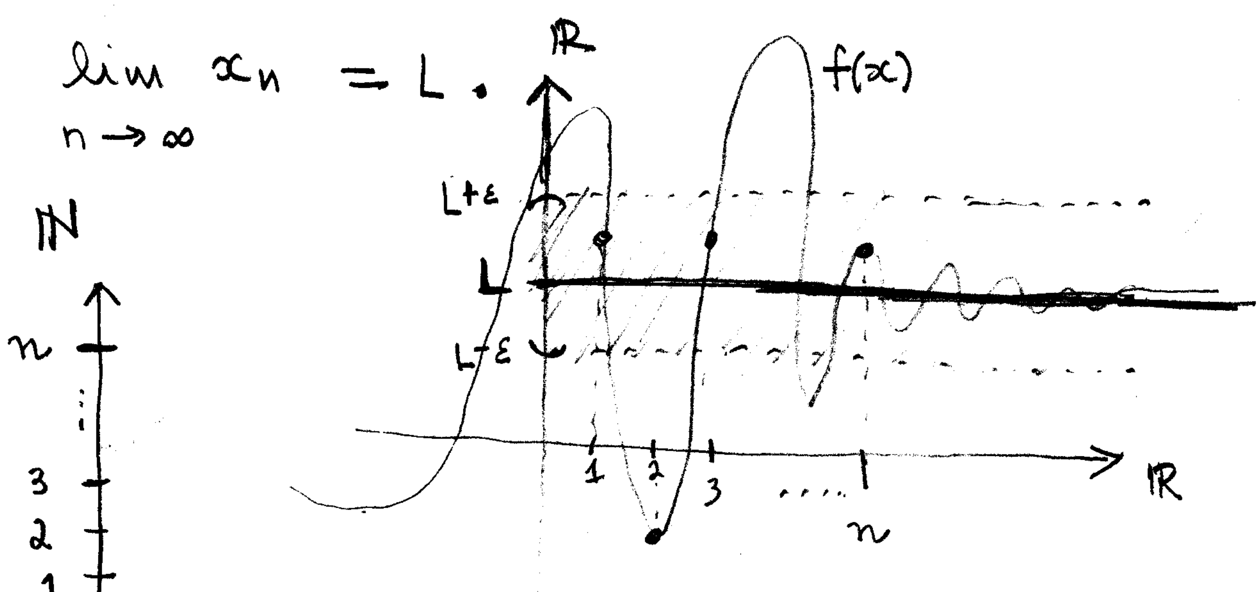
$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Gráfico :

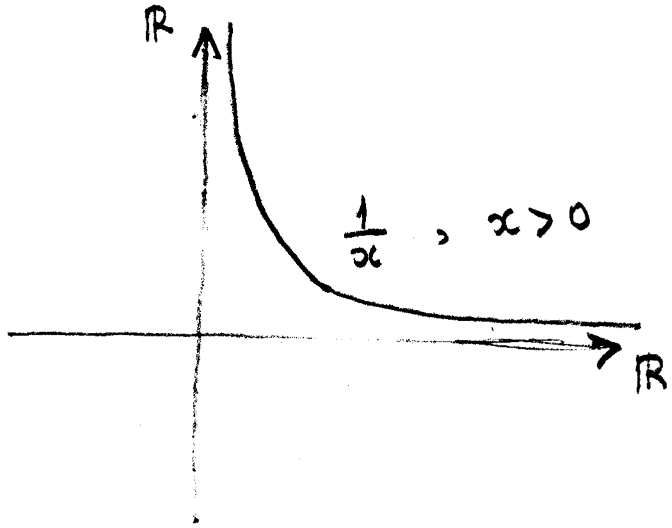


TEOREMA 1 : Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência definida por $x_n = f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L.$$



Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.



Defina a sequência $x_n := f(n) = \frac{1}{n}$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, então

pelo TEOREMA 1, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

<u>NOTAÇÃO</u>: Quando L é o limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, escrevemos $x_n \longrightarrow L$, quando $n \to \infty$ ao invés de $L = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Dizemos que $x_n \to +\infty$ quando $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Ou seja, se para cada $M > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$x_n > M \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $x_n \to L$ quando $n \to \infty$. Se

$L < \infty$, dizemos que $(x_n)_n$ é <u>convergente</u>;

$L = \pm\infty$, dizemos que $(x_n)_n$ é <u>divergente</u>.