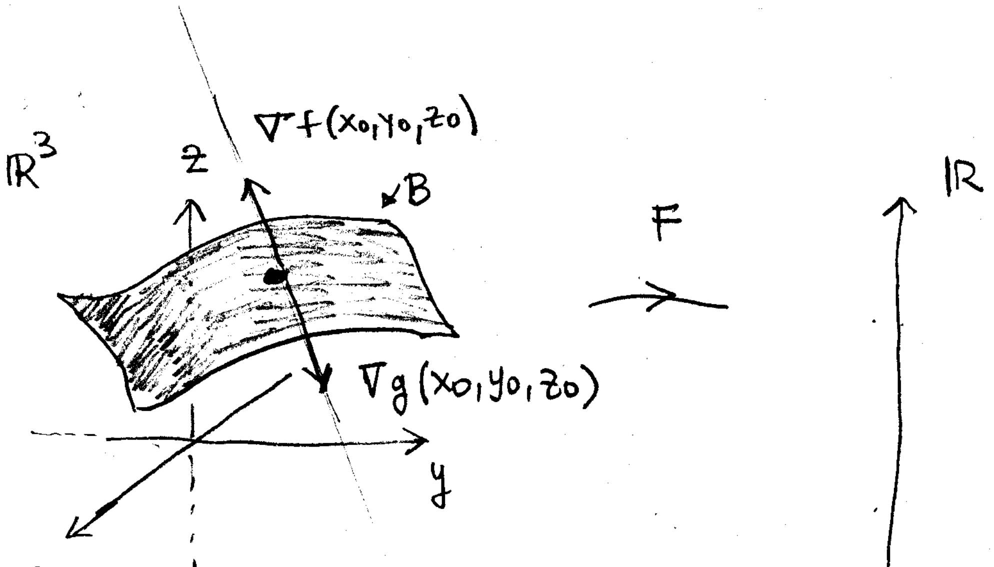
## AULA DO DIA 14/05/2018

TEOREMA 14 : Sejam $F: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, $A$ um aberto do $\mathbb{R}^3$ e $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$, onde $g$ é uma função de classe $C^1$ em $A$ e $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$, para todo $(x,y,z) \in B$. Se $(x_0, y_0, z_0)$ é ponto de máximo ou mínimo local de $f$ em $B$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

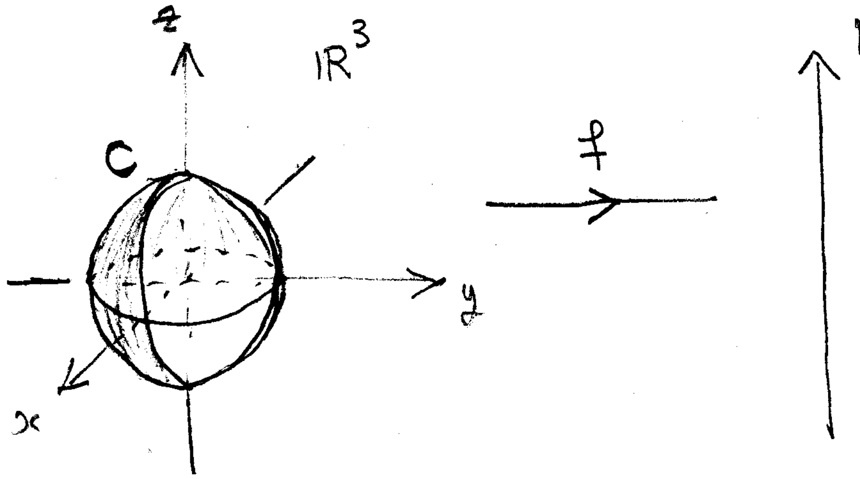



Exemplo : ( Exercício 15-c da L3)

Determinar os valores de máximo e mínimo da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$ no conjunto $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

SOLUÇÃO :

Vamos aplicar o TEOREMA 14 para encontrar os candidatos a ponto de máximo ou de mínimo da função $f$ na esfera (C):




Note que o conjunto C é superfície de nível 0 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 .$$

Essa função é de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^3$, pois

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2x , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 2y , \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

são funções contínuas, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Além disso

$\nabla g(x,y,z) = (0,0,0)$ se $(x,y,z) = (0,0,0) \notin C$.

A função $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ por possuir derivadas parciais contínuas em todo $\mathbb{R}^3$. Logo, o TEOREMA 14 nos diz que se $(x,y,z) \in C$ é ponto de máximo ou de mínimo local de $f$ em $C$ então $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

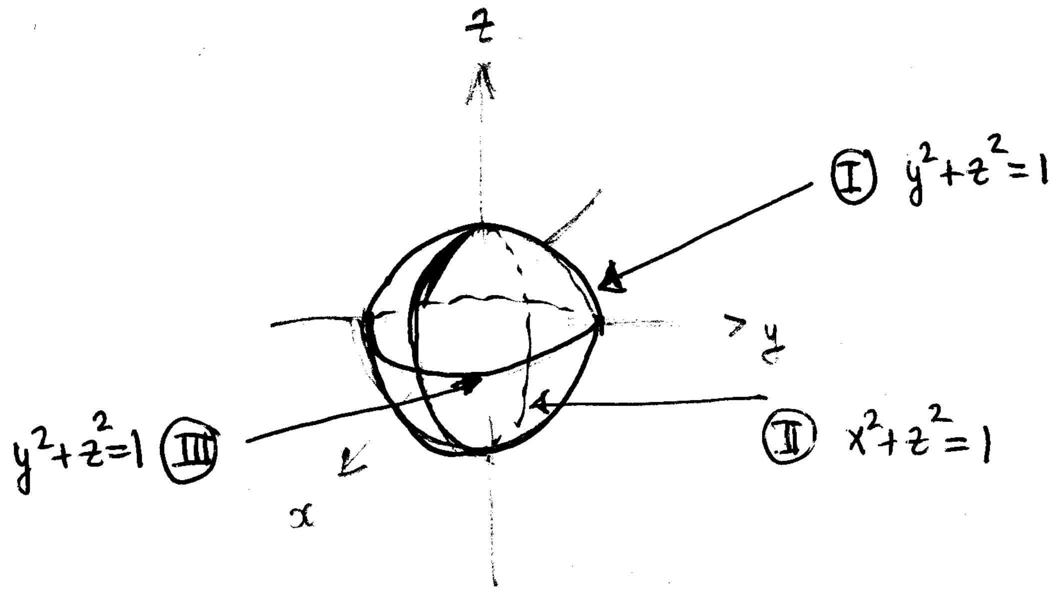
$$(2xy^2z^2,\ 2x^2yz^2,\ 2x^2y^2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 = 2\lambda x \\ 2x^2yz^2 = 2\lambda y \\ 2x^2y^2z = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy^2z^2 = \lambda x \\ x^2yz^2 = \lambda y \\ x^2y^2z = \lambda z \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, então $\begin{cases} xy^2z^2 = 0 \\ x^2yz^2 = 0 \\ x^2y^2z = 0 \end{cases}$.

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y, z \in \mathbb{R} \text{ quaisquer; } & \text{I} \\ y = 0 \Rightarrow x, z \in \mathbb{R} \text{ quaisquer; } & \text{II} \\ z = 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{R} \text{ quaisquer } & \text{III} \end{cases}$$




Se $\lambda \neq 0$, então
$$\begin{cases} x y^2 z^2 = \lambda x \\ x^2 y z^2 = \lambda y \\ x^2 y^2 z = \lambda z \end{cases}.$$

Logo,
$$\left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = z = 0 \\ z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin C.$$

Nesse caso, podemos supor que $x, y, z \neq 0$.

Logo,
$$\begin{cases} y^2 z^2 = \lambda \quad \text{I} \\ x^2 z^2 = \lambda \quad \text{II} \\ x^2 y^2 = \lambda \quad \text{III} \end{cases}$$

Fazendo I = II:

$y^2 z^2 = x^2 z^2 \to$

$y^2 = x^2 \to \boxed{y = \pm x}$

Substituindo em III :

$$x^2 y^2 = \lambda \qquad\qquad x^4 = \lambda$$

$$x^2 (\pm x)^2 = \lambda \qquad \boxed{x = \pm \sqrt[4]{\lambda}}$$

Assim, $\boxed{y = \pm x = \pm \sqrt[4]{\lambda}}$ e

$$(\pm \sqrt[4]{\lambda})^2 \cdot z^2 = \lambda \qquad\qquad z = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt[4]{\lambda}}$$

$$\sqrt{\lambda} \cdot z^2 = \lambda$$

$$\boxed{z = \pm \sqrt[4]{\lambda}}$$

$$z^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Por isso, $(x,y,z) = (\pm \sqrt[4]{\lambda}, \pm \sqrt[4]{\lambda}, \pm \sqrt[4]{\lambda})$.

Como $(x,y,z) \in C$ então:

$$(\pm \sqrt[4]{\lambda})^2 + (\pm \sqrt[4]{\lambda})^2 + (\pm \sqrt[4]{\lambda})^2 = 1$$

$$\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} = 1$$

$$3\sqrt{\lambda} = 1$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{9}}$$

Logo, os candidatos a máximo e mínimo (no caso $\lambda \neq 0$) são os pontos:

$$(x,y,z) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right).$$

Como $C$ é um compacto do $\mathbb{R}^3$ e $f$ é uma função contínua, $f$ atinge seus extremos em $C$.

Com isso, p/ encontrar o máximo e o mínimo de $f$ em $C$, basta comparar os seus valores nos pontos encontrados nos casos $(\lambda = 0$ e $\lambda \neq 0)$:

$$\boxed{\lambda=0} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1, & e \; z=0 \\ x^2+z^2=1, & e \; y=0 \\ y^2+z^2=1, & e \; x=0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z)=0$$

$$\boxed{\lambda\neq 0} \Rightarrow (x,y,z) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right)^2 \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right)^2 \cdot \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right)^2$$

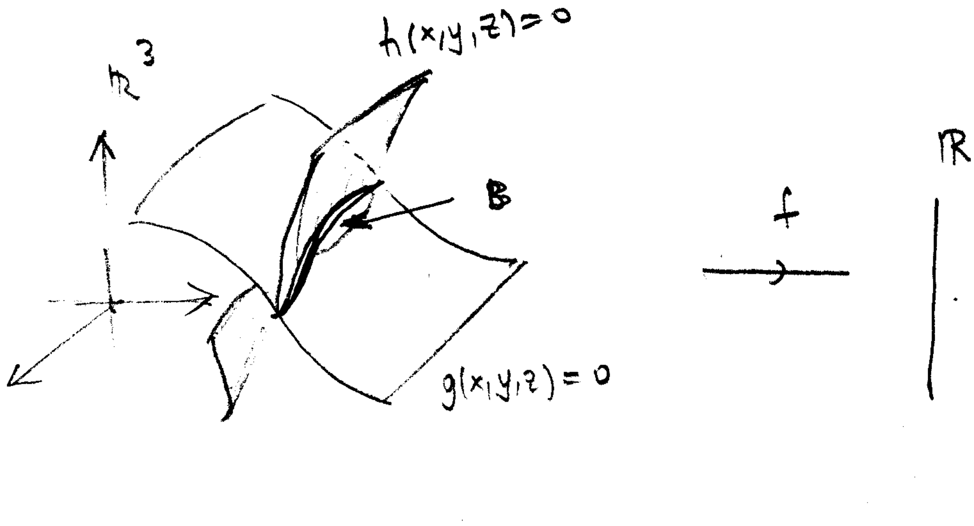
$$= \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

Logo o valor mínimo de $f$ é $0$ e os pontos de mínimo estão sobre as circunferências $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ ou $y^2+z^2=1$. O valor máximo de $f$ é $\frac{1}{27}$ e os pontos de máximo de $f$ são $\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{9}}\right)$.

TEOREMA 15: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $B = \{(x,y,z) \in A ; \ g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$ onde $g, h$ são funções de classe $C^1$ em A com $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0)$, p/ todo $(x,y,z) \in B$.

Se $(x,y,z) \in B$ é ponto de máximo ou de mínimo de $f$ em B então existem $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

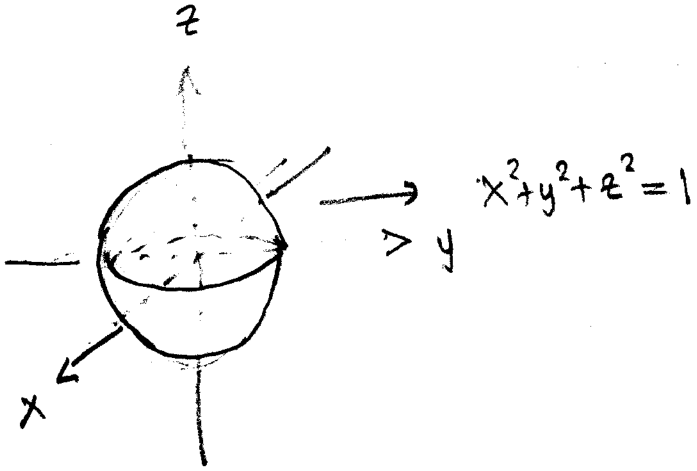
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \beta \nabla h(x,y,z).$$

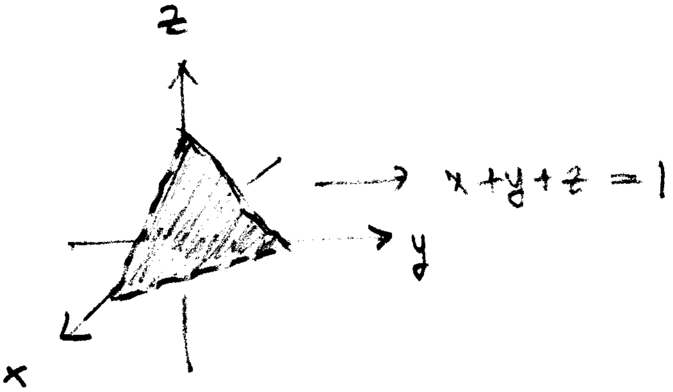


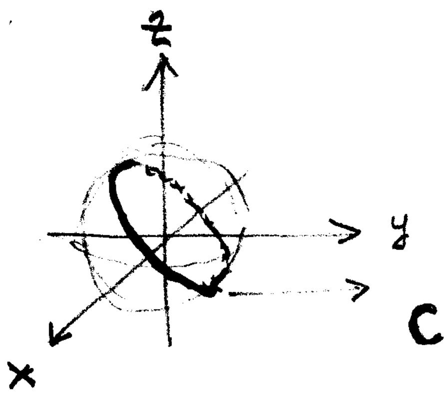

Exemplo: Determinar os valores de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ sobre o conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } x+y+z = 1\}$$

SOLUÇÃO :




É claro que $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ (Verificar!)

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x,y,z) = x+y+z-1$ .

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y).$$

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (0,0,0) \iff (x,y,z)=(0,0,0) \notin C$$

Logo $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \forall\ (x,y,z) \in C.$

Pelo <u>TEOREMA 15</u>, se $(x,y,z)$ é ponto de máximo ou de mínimo local de $f$ em $C$, existe $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tq:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \beta \nabla h(x,y,z)$$

Ou seja,

$$\{\nabla f(x,y,z),\ \nabla g(x,y,z),\ \nabla h(x,y,z)\} \text{ é LD}$$

Por isso,

$$\det \begin{bmatrix} \nabla f(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \\ \nabla h(x,y,z) \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot 2 \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x-y=0 \quad \text{ou} \quad x-z=0 \quad \text{ou} \quad y-z=0$$

(•) Se $x-y=0$ então $y=x$ e $x, z \in \mathbb{R}$ qualquer ;

(••) Se $x-z=0$ então $z=x$ e $x, y \in \mathbb{R}$ " ;

(•••) Se $y-z=0$ então $z=y$ e $x, y \in \mathbb{R}$ " .

Como $(x,y,z) \in C$ :

(•) $(x,y,z) = (x,x,z) \Rightarrow$

$$x^2+x^2+z^2=1 \quad e \quad x+x+z=1$$

$$z^2 = 1-2x^2 \quad e \quad z = 1-2x$$

$$(1-2x)^2 = 1-2x^2 \Rightarrow$$

$$x=0 \quad ou \quad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=1$ PTO $\rightarrow (0,0,1)$

$x=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3} \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$ PTO $\rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$

Analogamente

(••) $x=0$ ou $x=\frac{2}{3}$ (PTOS $\rightarrow (0,1,0)$ ou $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(•••) $y=0$ ou $y=\frac{2}{3}$ (PTOS $\rightarrow (1,0,0)$ ou $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(Falta fazer a análise dos pontos encontrados!)

AULA DE EXERCÍCIOS 16/05/2018

EXERCÍCIO 3

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x_1, \dots, x_n) = \|x\|^2 (x_1, \dots, x_n)$ , $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

SOLUÇÃO :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Big( \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2)x_1}_{\overset{\parallel}{f_1(x_1, \dots, x_n)}} , \dots , \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2) \cdot x_n}_{\overset{\parallel}{f_n(x_1, \dots, x_n)}} \Big)$$

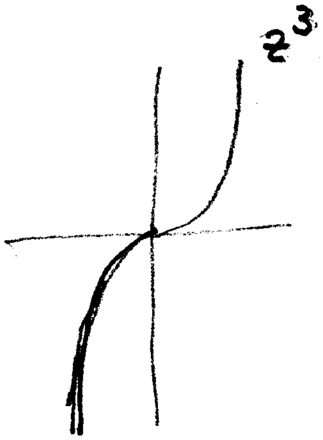
Como $f_1, \dots, f_n$ são funções polinômiais , então $f_1, \dots, f_n$ são funções de classe $C^k$ em $\mathbb{R}^n$ , $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

$\underline{\underline{2^{\circ}}}$: $f|_{B_1(0)}$ é injetora:

Sejam $x, y \in B_1(0)$ com $f(x) = f(y)$. Logo,

$\|x\|^2 \cdot x = \|y\|^2 \cdot y \Rightarrow \| \|x\|^2 \cdot x \| = \| \|y\|^2 \cdot y \|$

$\Rightarrow \|x\|^2 \cdot \|x\| = \|y\|^2 \cdot \|y\| \Rightarrow \|x\|^3 = \|y\|^3$



função cúbica é injetora

$\Rightarrow \|x\| = \|y\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{\|x\|^2} \cdot x}{\cancel{\|x\|^2}} = \dfrac{\cancel{\|y\|^2} \cdot y}{\cancel{\|y\|^2}}$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow$ Logo $f|_{B_1(0)}$ é injetora

$\underline{\underline{3^{\circ}}}$: $f(B_1(0)) = B_1(0)$

Se $y \in f(B_1(0))$ existe $x \in B_1(0)$ tal que $y = f(x) = \|x\|^2 \cdot x$. Logo,

$\|y\| = \| \|x\|^2 \cdot x \| = \|x\|^2 \cdot \|x\| = \|x\|^3 < 1$, pois $\|x\| <$

Logo $y \in B_1(0)$. Por isso, $f(B_1(0)) \subset B_1(0)$

Por outro lado, seja $y \in B_1(0)$. Se $y = 0$ então defina $x := 0 \in B_1(0)$ tq

$$f(x) = f(0) = \|0\|^2 \cdot 0 = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} = (0, \dots, 0))$$

Se $y \neq 0$, então defina $x := \dfrac{y}{\|y\|^{2/3}}$.

$$\|x\| = \left\| \frac{y}{\|y\|^{2/3}} \right\| = \frac{\|y\|}{\|y\|^{2/3}} = \|y\|^{1-2/3} = \|y\|^{1/3} < 1$$

pois $\|y\| < 1$, logo $x \in B_1(0)$.

$$f(x) = f\left(\frac{y}{\|y\|^{2/3}}\right) = \left\| \frac{y}{\|y\|^{2/3}} \right\|^2 \cdot \frac{y}{\|y\|^{2/3}}$$

$$= \frac{\|y\|^2}{\|y\|^{4/3}} \cdot \frac{y}{\|y\|^{2/3}} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|^{6/3}} \cdot y$$

$$= \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} \cdot y = y \,/\!/.$$ Por isso, $B_1(0) \subset f(B_1(0))$.

Portanto, $B_1(0) = f(B_1(0))$.

4º: $f^{-1}: B_1(0) \to B_1(0)$ não é diferenciável em $0 = (0, \dots, 0)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^{2/3}}, \quad \text{pois}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{\|x\|^{2/3}}\right) = \left\|\frac{x}{\|x\|^{2/3}}\right\|^2 \cdot \frac{x}{\|x\|^{2/3}}$$

$$= \frac{\|x\|^2}{\|x\|^{4/3}} \cdot \frac{x}{\|x\|^{2/3}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\|x\|^2 \cdot x) = \frac{\|x\|^2 \cdot x}{\|\|x\|^2 \cdot x\|^{2/3}}$$

$$= \frac{\|x\|^2 \cdot x}{(\|x\|^2)^{2/3} \cdot \|x\|^{2/3}} = \frac{\|x\|^2 \cdot x}{\|x\|^{4/3} \cdot \|x\|^{2/3}} = x$$

Logo $f^{-1}$ é a inversa de $f$.

Verifiquemos que $f^{-1}$ não é diferenciável em $0$

Vejamos no caso $n = 2$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \|(x,y)\|^2 \cdot (x,y) \\ &= (x^2+y^2)(x,y) \\ &= (\underbrace{x^3+xy^2}_{f_1(x,y)}, \underbrace{x^2y+y^3}_{f_2(x,y)}) \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \cdot (x,y) \ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \ , & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$D_1 f_1(x,y) = 3x^2 + y^2$ $\quad$ $D_2 f_1(x,y) = 2xy$

$D_1 f_2(x,y) = 2xy$ $\quad$ $D_2 f_2(x,y) = x^2 + 3y^2$ , $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det } Df(0,0) = 0 \Rightarrow$$

$Df(0,0)$ é singular, logo ñ podemos aplicar o TEOREMA 8 p/ $f$ e $a = (0,0)$! ou seja, ñ podemos concluir sobre a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$!

Vejamos que $f^{-1}$ não é diferenciável em $(0,0)$:

$$D_1 f_1^{-1}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1^{-1}((0,0)+te_1) - f_1^{-1}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1^{-1}(t,0) - f_1^{-1}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{t}}{\sqrt[3]{t^2}} - 0}{\cancel{t}}$$

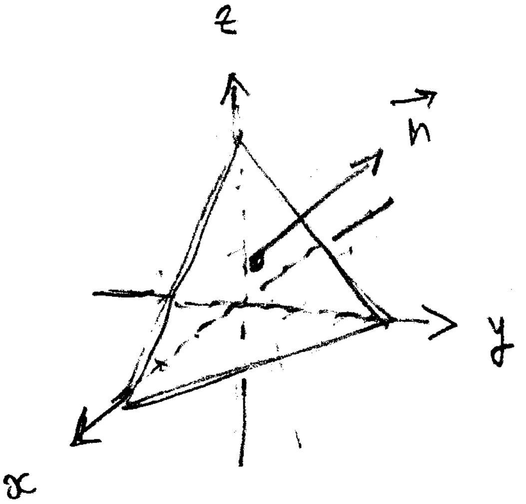
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = \infty$$

Logo $Df^{-1}(0,0)$ ñ existe. Assim $f^{-1}$ não é diferenciável em $(0,0)$.

EXERCÍCIO 16

Eq. do plano que passa por (2,2,1) que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

SOLUÇÃO




considere $\vec{n}$ o vetor normal ao plano.

como o plano deve formar um tetraedro c/ o 1º octante então todas as coordenadas do normal são não-nulos. Assim podemos representá-lo:

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } \neq 0.$$

A equação do plano que passa por (2,2,1) e que tem $\vec{n}$ como vetor normal é:

$$\langle \vec{n}, (x-2, y-2, z-1) \rangle = 0$$

$$\frac{x-2}{a} + \frac{y-2}{b} + \frac{z-1}{c} = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \underbrace{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}}_{:= d}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = d$$ (Eq. do plano) onde

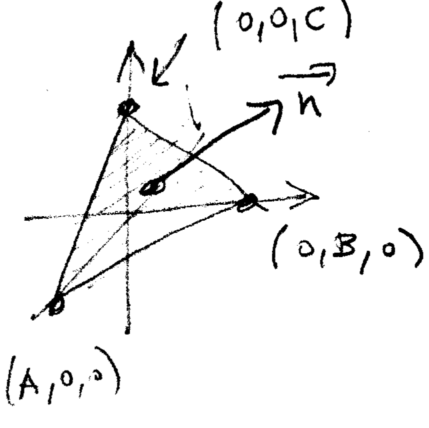
$$d = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$$

Logo
$$\begin{cases} \dfrac{x}{ad} + \dfrac{y}{bd} + \dfrac{z}{cd} = 1 & \text{(Eq. do plano)} \\[2ex] \dfrac{2}{ad} + \dfrac{2}{bd} + \dfrac{1}{cd} = 1 & \text{(restrição)} \end{cases}$$

Fazendo $A = ad$, $B = bd$, $C = cd$ temos

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} + \dfrac{z}{C} = 1 \\[2ex] \dfrac{2}{A} + \dfrac{2}{B} + \dfrac{1}{C} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x, y = 0 \implies z = C \\ y, z = 0 \longrightarrow x = A \\ x, z = 0 \implies y = B \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{6}BC = -\frac{2\lambda}{A^2} \\ \frac{1}{6}AC = -\frac{2\lambda}{B^2} \\ \frac{1}{6}AB = \frac{-\lambda}{C^2} \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ então

$$\begin{cases} \frac{1}{6}BC = 0 \\ \frac{1}{6}AC = 0 \\ \frac{1}{6}AB = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 0 \Rightarrow C \text{ qualquer;} \\ A = C = 0 \Rightarrow B \text{ qualquer;} \\ B = C = 0 \Rightarrow A \text{ qualquer.} \end{cases}$$

Como $A, B, C > 0$ então descartamos o caso $\lambda = 0$.

Podemos supor então que $\lambda \neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{1}{6}ABC = \frac{-2\lambda}{A} \\ \frac{1}{6}ABC = \frac{-2\lambda}{B} \\ \frac{1}{6}ABC = -\frac{\lambda}{C} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6}ABC = \frac{-2\lambda}{A} = \frac{-2\lambda}{B} = \frac{-\lambda}{C}$$

$\Rightarrow A = B$ e $C = \frac{A}{2}$, $A \in$

Como, $\frac{2}{A} + \frac{2}{B} + \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow$ $A = 6$, $B = 6$, $C = 3$

O volume do tetraedro é

$$V(x,y,z) = \frac{1}{6} xyz$$

$$\begin{cases} V(A,B,C) = \frac{1}{6} ABC \\ \text{restrito a } \frac{2}{A} + \frac{2}{B} + \frac{1}{C} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial A}(A,B,C) = \frac{1}{6} BC, \quad \frac{\partial V}{\partial B}(A,B,C) = \frac{1}{6} AC$$

$$\frac{\partial V}{\partial C}(A,B,C) = \frac{1}{6} AB$$

$V$ é dif. em $\mathbb{R}^3$. Defina

$$g(A,B,C) = \frac{2}{A} + \frac{2}{B} + \frac{1}{C} - 1$$

$$\nabla g(A,B,C) = \left(-\frac{2}{A^2}, -\frac{2}{B^2}, -\frac{1}{C^2}\right) \neq (0,0,0)$$

Assim, se $(A,B,C)$ é ponto de máximo ou de mínimo local de $V$ em $B := \{(A,B,C) \in \mathbb{R}^3;\ g(A,B,C) = 0\}$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla V(A,B,C) = \lambda \nabla g(A,B,C)$$

Note que $\vec{N} = \left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$ é normal ao plano.

Logo $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$, ou seja,

$$\frac{x+y+2z}{6} = 1$$

$$x+y+2z = 6$$

$$\boxed{x+y+2z-6=0} \rightarrow \text{eq. do plano.}$$

(Argumentar porq o plano $x+y+2z-6=0$ produz um volume mínimo!)