FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E SÉRIES

AULA DO DIA 06/03/2018

CONCEITOS DE TOPOLOGIA:

1º Motivação para a definição de métrica:

Exemplo 1: Seja $X \neq \phi$ qualquer. Defina a função

$d: X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$.

(1)

Se $x = y$, então $d(x,y) = 0$.

Se $d(x,y) = 0$, então $x = y$. Logo,

$$\boxed{d(x,y) = 0 \iff x = y}$$

Se $x \neq y$ então $d(x,y) = 1 > 0$. Logo, para qualquer $x, y \in X$ $d(x,y) \geq 0$;

(2)

Sejam $x, y \in X$. Se $x \neq y$, então

$$d(x,y) = 1 = d(y,x).$$

Se $x = y$, então $d(x,y) = 0 = d(y,x)$. Logo, para quaisquer $x, y \in X$ é verdade que $\boxed{d(x,y) = d(y,x)}$.

(3) Sejam $x, y, z \in X$. Se $x = y = z$ então

$d(x,y) = 0$

$d(x,z) = 0$. Logo $d(x,y) = 0 = 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$

$d(z,y) = 0$

Se $x = y \neq z$, então

$d(x,y) = 0$
$d(x,z) = 1$. Logo $d(x,y) = 0 < 1+1 = d(x,z) + d(z,y)$
$d(z,y) = 1$

Se $x \neq y \neq z$, então

$d(x,y) = 1$
$d(x,z) = 1$. Logo $d(x,y) = 1 < 1+1 = d(x,z) + d(z,y)$.
$d(z,y) = 1$

Concluímos que p/ quaisquer $x, y, z \in X$ é verdade que

$$\boxed{d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)}$$

Exemplo 2 : Exercício 1-b. da LISTA 2

$\mathbb{R}^2$, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \|x - y\|$

$$d(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$
$$= \sqrt{\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle}$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

(1)

Sejam $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Se $x = y$, então $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Logo

$$d(x,y) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.$$

Se $d(x,y) = 0$, então $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = 0$. Logo

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 = 0 .$$

A última igualdade é verdadeira se, e somente se, $x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0$. Ou seja, $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$.

Logo $x = y$. Com isso:

$$\boxed{d(x,y) = 0 \iff x = y}$$

Além disso, é sempre válido que $(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \geqslant 0$

Logo $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \geqslant 0$. Assim,

$$\boxed{d(x,y) \geqslant 0 \quad , \text{ p/ todo } x,y}$$

(2)

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2}$$
$$= d(y,x)$$

(3) Para verificar essa condição, recordaremos alguns resultados de Álgebra Linear:

1º Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad , \forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$$

De fato,

$$\|x - cy\|^2 = \langle x-cy, x-cy\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle \cdot c + c^2 \langle y,y\rangle$$

$= c^2\|y\|^2 - 2c\langle x,y\rangle + \|x\|^2$. Logo,

$c\|y\|^2 - 2c\langle x,y\rangle + \|x\|^2 \geq 0$, ou seja

$$(-2\langle x,y\rangle)^2 - 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \leq 0$$

$$0 \leq 4\langle x,y\rangle^2 \leq 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \implies$$

$$2|\langle x,y\rangle| \leq 2\|x\| \cdot \|y\| \implies$$

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Essa é a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

2°: Consequência da desigualdade:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\overset{(1^\circ)}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned} \implies \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3°: Verificação do ítem:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \overset{(2^\circ)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Métrica sobre um conjunto X é uma função que satisfaz as mínimas propriedades de distância.

DEFINIÇÃO 1: Uma métrica sobre um conjunto X é uma função $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$:

(1) $d(x,y) \geq 0$ e
$d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

(2) $d(x,y) = d(y,x)$;

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x)$.

OBSERVAÇÃO 1: Um ESPAÇO MÉTRICO é um conjunto X com uma métrica d definida sobre X.

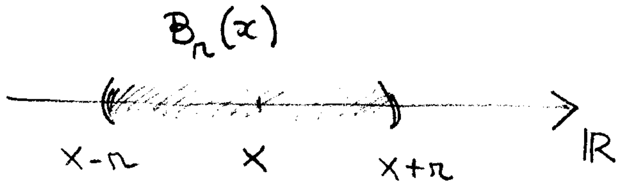
NOTAÇÃO: (X, d)

CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS DE UM ESPAÇO MÉTRICO:

Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:
Fixados $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$:

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R} : |x-y| < r \}$$

$$y \in B_r(x) \Rightarrow |x-y| < r$$
$$\Rightarrow -r < x-y < r$$
$$\Rightarrow -r < y-x < r \Rightarrow x-r < y < x+r$$



$B_r(x)$ é o intervalo aberto centrado em x de raio r.

Qual a noção de intervalo aberto de um espaço métrico?

<u>DEFINIÇÃO 2</u>: Seja (X, d) um espaço métrico. A bola aberta de raio $r > 0$ centrada em $x \in X$ é o conjunto:

$$B_r(x) = \{ y \in X ; d(x,y) < r \}$$

AULA DO DIA 07/03/2018

<u>Exemplo</u>: $(\mathbb{R}^2, d)$, $B_r(x) = ?$

<u>1º</u>: $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = \|x-y\|_2$

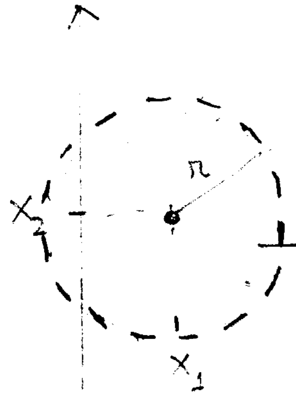
$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r \}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\|_2 < r \}$$

$$y \in B_r(x) \Rightarrow \|x-y\|_2 < r \Rightarrow$$

$$0 < \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} < r \Rightarrow$$

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 < r^2$$

$$(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < r^2$$



Bola centrada em $X = (x_1, x_2)$ de raio r com a métrica Euclidiana

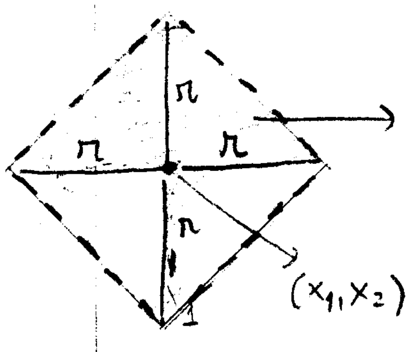
$\underline{\underline{2^o}}$: $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x - y\|_1$

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r \}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\|_1 < r \}$$

$y \in B_r(x) \Rightarrow \|x - y\|_1 < r \Rightarrow$

$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| < r \Rightarrow$

$|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r$



Bola centrada em $x = (x_1, x_2)$ de raio r com a métrica 1, ou métrica da soma

$\underline{\underline{3^o}}$: $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

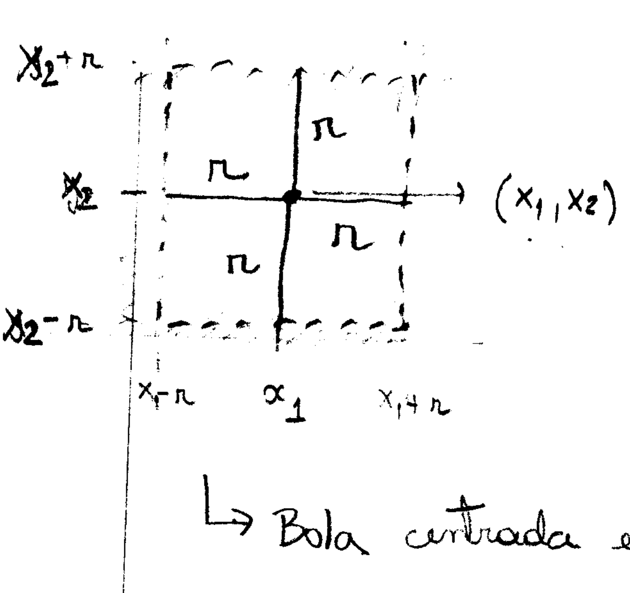
$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < r\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x-y\|_\infty < r\}$$

$$y \in B_r(x) \Rightarrow \|x-y\|_\infty < r \Rightarrow$$

$$\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} < r \Rightarrow$$

$$|x_1-y_1| < r \quad e \quad |x_2-y_2| < r$$

$$x_1 - r < y_1 < x_1 + r \quad e \quad x_2 - r < y_2 < x_2 + r$$

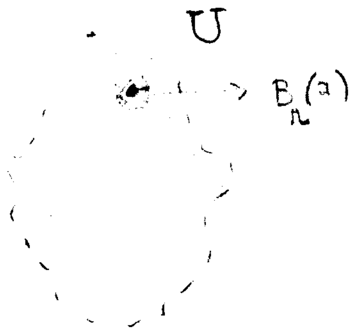


↳ Bola centrada em (x_1, x_2) de raio r com a métrica do máximo (ou do supremo).

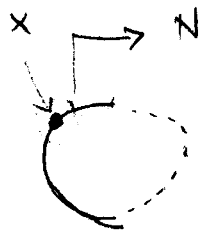
A partir de agora, vamos definir os conjuntos abertos de um espaço métrico:

<u>DEFINIÇÃO 3</u>: Seja X um espaço métrico. Um subconjunto $U \subset X$ é <u>aberto</u> se para todo $x \in U$ existir $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.

<u>Ilustração</u>:



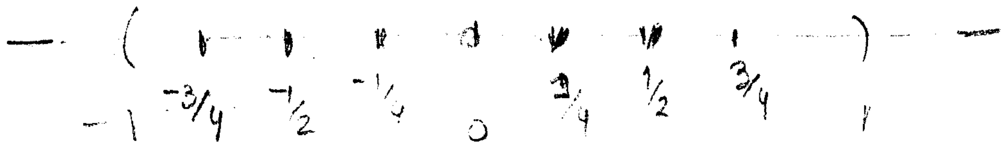
toma qualquer elemento de U, e apresenta um valor r tal que $B_r(x) \subset U$.



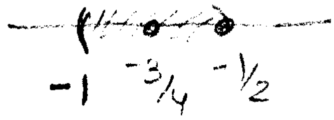
Não existe $r > 0$, tal que $B_r(x) \subset U$.

<u>Exemplo</u> Seja $\mathbb{R}$ com a métrica usual. O intervalo $(-1, 1)$ é um conjunto aberto.

Ilustração :



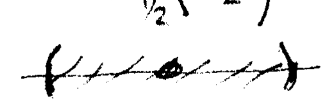
(o) $x = -\frac{3}{4}$, $r = 1 - \left|-\frac{3}{4}\right| = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$



$B_{1/4}(-3/4) = (-1, -1/2) \subset (-1,1)$

$B_{1/2}(-1/2)$

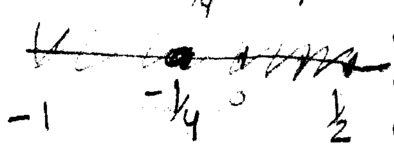
(oo) $x = -\frac{1}{2}$, $r = 1 - \left|-\frac{1}{2}\right| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



$B_{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1, 0) \subset (-1,1)$

$B_{3/4}(-1/4)$

(ooo) $x = -\frac{1}{4}$, $r = 1 - \left|-\frac{1}{4}\right| = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



$B_{3/4}(-1/4) = (-1, 1/2) \subset (-1,1)$

Tome $x \in (-1,1)$ defina $r := 1 - |x|$.

Afirmo que $B_r(x) \subset (-1,1)$.

De fato, tome $y \in B_r(x)$, então

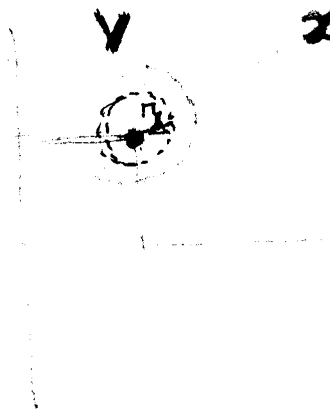
$$|y - x| < r = 1 - |x|$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |y| = |y-x+x| &\leq |y-x| + |x| \\ &< 1-|x| + |x| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja $|y| < 1$, logo $y \in (-1,1)$. Portanto apresentamos $r := 1-|x|$ de tal forma que $B_r(x) \subset (-1,1)$. Ou seja, $(-1,1)$ é um conjunto aberto.

<u>Ilustração de vizinhança</u>:

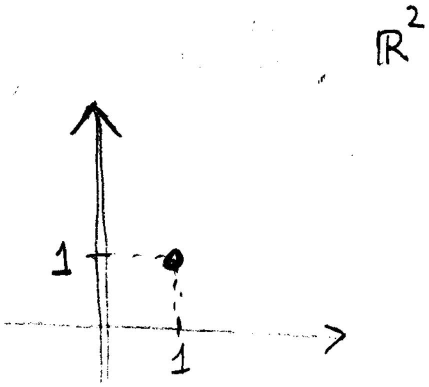


V é uma vizinhança de x se existir $r>0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$

<u>DEFINIÇÃO 4</u>: Seja X um espaço métrico. Um conjunto V é uma vizinhança de $x \in X$ se existir $r>0$ tal que $B_r(x) \subset V$.

Exemplo:

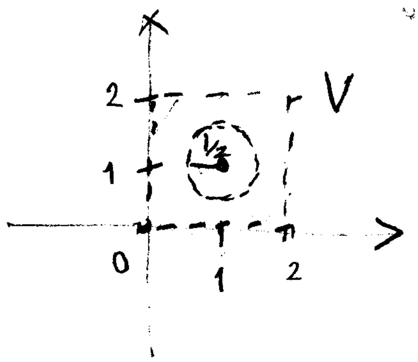
Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$ onde d é a métrica euclidiana.



O conjunto:

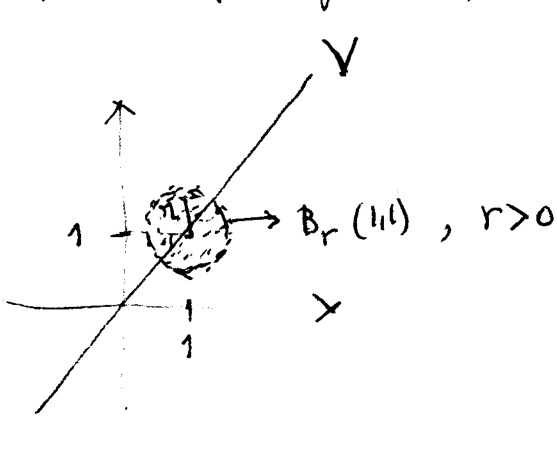
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 2\}$

é uma vizinhança de $(1,1)$ pois a bola aberta $B_{1/2}(1,1) \subset V$. (Verificar!)



Exemplo: $(\mathbb{R}^2, d)$, onde d é a métrica euclidiana

o conjunto $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ não é uma vizinhança de $(1,1)$ porque toda bola aberta $B_r(1,1) \not\subset V$. (Verificar!)



OBS: Na realidade, se considerarmos $\mathbb{R}^2$ com a métrica da soma ou do máximo, o conjunto V acima