

Lista 4 - MAT0236 Funções Diferenciáveis e Séries

Professor Thiago Grando

4 de junho de 2018

1. Escreva as possíveis representações das sequências:

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \dots\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8} \dots\right)$

c) $(2, 7, 12, 17 \dots)$

d) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25} \dots\right)$

e) $(2, 1, 2, 1, 2 \dots)$

2. Dado $\epsilon > 0$ encontre $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$:

a) $x_n = \frac{2 + 4n^2}{n + n^2}, n \in \mathbb{N}, L = 4$

b) $x_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}, n \in \mathbb{N}, L = 0$

c) $x_n = \frac{n^2}{e^n}, n \in \mathbb{N}, L = 0$

3. Determine se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ou diverge. Se convergir encontre seu limite.

a) $x_n = n(n - 1)$

b) $x_n = \frac{n + 1}{3n - 1}$

c) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$

d) $x_n = \frac{n}{1 + \sqrt{n}}$

e) $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 + 1}$

f) $x_n = (-1)^n \frac{n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

g) $x_n = \cos\left(\frac{n}{2}\right)$

h) $x_n = \ln(n + 1) - \ln(n)$

i) $x_n = n \sin \left(\frac{1}{n} \right)$

j) $x_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}$

k) $x_n = \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$

l) $x_n = \frac{\sin(2n)}{1 + \sqrt{n}}$

m) $x_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

4. Para quais valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n = \lambda^n$ é convergente?

5. Determine se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, decrescente ou monótona e se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

a) $x_n = \frac{1}{3^n}$

b) $x_n = \frac{1}{2n+3}$

c) $x_n = \frac{2n-3}{3n+4}$

d) $x_n = \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$

e) $x_n = ne^{-n}$

f) $x_n = \frac{n}{n^2+1}$

6. Calcule o limite da sequência

$$\left(\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \dots \right).$$

7. Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida por $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

a) Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente por 3.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, caso exista.

8. Considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n}$.

a) Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente e limitada.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

9. Determine se a série é convergente ou divergente. Se convergir encontre sua soma.

a) $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \dots$

b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \dots$

c) $-2 + \frac{5}{2} - \frac{25}{8} + \frac{125}{32} - \dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+3)} + \frac{5}{4^n}\right)$

10. Encontre valores para x para os quais a série converge. Para tais valores, calcule a soma da série.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos^n(x)}{2^n}\right)$

11. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ é divergente cujos termos se aproximam de 0.