Lista 3 - MAT0236 Funções Diferenciáveis e Séries

Professor Thiago Grando

23 de abril de 2018

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

   a) Mostre que $f|_A$ é uma função injetora, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

   b) Dê a expressão de $f(A)$. Esboce $f(A)$ no plano.

   c) Encontre $Df^{-1}(0,1)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$.

   a) Mostre que $f|_A$ é uma função injetora, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$.

   b) Dê a expressão de $f(A)$. Esboce $f(A)$ no plano.

   c) Encontre $Df^{-1}(0,1)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função definida por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 .\mathbf{x}$. Mostre que f é de classe $\mathcal{C}^\infty$, que $f|_{B_1(\mathbf{0})}$ é injetora e $f(B_1(\mathbf{0})) = B_1(\mathbf{0})$. No entanto, mostre que f^{-1} não é diferenciável em $\mathbf{0}$.

4. Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $g(x,y) = (2ye^{2x}, xe^y)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3)$.

   a) Mostre que existe uma vizinhança V_1 de $(0,1)$ tal que $g|_{V_1}$ é injetora e $g(V_1) = V_2$, para alguma vizinhança V_2 de $(2,0)$.

   b) Encontre $D(f \circ g^{-1})(2,0)$.

5. Sejam A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^k$. Suponha que $Df(\mathbf{x})$ é não-singular para todo $\mathbf{x} \in A$. Mostre que, mesmo que $f|_A$ não seja injetora, o conjunto $f(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

6. A equação $y^3 + xy + x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

7. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

   a) $x^2 y + \sin(y) = x$.

   b) $y^4 + x^2 y^2 + x^4 = 3$.

8. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x,y)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y e z.

   a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$.

   b) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$.

9. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$ onde $F(u, v)$ é uma função diferenciável. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y e das derivadas parciais de F.

10. Suponha que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.

b) Determine um par de funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ dadas implicitamente por esse sistema.

11. Suponha que $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x}, \ x \neq 0. \end{cases}$$

Mostre que $\dfrac{\partial x}{\partial u}\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = 1$.

12. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy. \end{cases}$$

a) Expresse $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ em termos de x, y

b) Determine um par de funções $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ dadas implicitamente por esse sistema.

13. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Escreva f na forma $f(x, y_1, y_2)$ e suponha que $f(3, -1, 2) = (0, 0)$ e

$$Df(3, -1, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que existe uma função $g : B \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$, de classe $\mathcal{C}^1$, onde B é um aberto de $\mathbb{R}$, tal que $f(x, g_1(x), g_2(x)) = (0, 0)$ para todo $x \in B$ e $g(3) = (-1, 2)$.

b) Calcule $Dg(3)$.

14. Sejam $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\mathbf{a} = (1, 2, -1, 3, 0)$. Suponha que $f(\mathbf{a}) = (0, 0)$ e

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que existe uma função $g : B \to \mathbb{R}^2$, $g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$, de classe $\mathcal{C}^1$, onde B é um aberto de $\mathbb{R}^3$, tal que $f(x_1, g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), x_2, x_3) = (0, 0)$ para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2.x_3) \in B$ e $g(1, 3, 0) = (2, -1)$.

b) Calcule $Dg(1, 3, 0)$.

15. Determine os valores e pontos de máximo e mínimo da função f em C:

a) $f(x,y) = xy$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0\}$.

R: valor mínimo: -16**, valor máximo:** 4.

b) $f(x,y,z) = xyz$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$.

R: valor mínimo: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$**, valor máximo:** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

R: valor mínimo: 0**, valor máximo:** $\frac{1}{27}$.

d) $f(x,y,z) = x + y + z$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \text{ e } 4x + 4y = z^2\}$.

R: pontos de mínimo: $(0,1,-2)$ **e** $(1,0,-2)$**, ponto de máximo:** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2}\right)$.

e) $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \ , z > 0, \text{ e } 2z = 2x + y + 4\}$.

R: valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$**, valor máximo:** $-19 + 6\sqrt{7}$.

f) $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \ , z > 0, \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$.

R: valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$**, valor máximo:** $-\frac{1}{2}$.

16. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

R: $x + y + 2z - 6 = 0$.

17. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

R: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3}\right)$.

18. Um pentágono com $12cm$ de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

R: $12(2-\sqrt{3})$**,** $2(3-\sqrt{3})$ **e** $4(2\sqrt{3}-3)$.

19. Sendo x, y e z ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin(x) + \sin(y) + \sin(z)$.

R: $3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. Dados $a, b, c > 0$, considere a família de todos os tetraedros delimitados pelos planos coordenados e por um plano tangente ao elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ num ponto do primeiro octante. Encontre, caso existam, o volume máximo e o volume mínimo dos tetraedros dessa família.

R: volume mínimo é $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.