Lista 2 (complementar) - MAT0236 Funções Diferenciáveis e Séries

Professor Thiago Grando

9 de abril de 2018

1. (Teorema do Valor Médio) Sejam A um conjunto aberto do $\mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em A. Prove que se A contém o segmento de reta com extremos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{h}$, então existe um ponto $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t_0\mathbf{h}$ desse segmento, com $t_0 \in (0, 1)$, tal que $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{c}).\mathbf{h}$.

2. Sejam A um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Suponha que g leva uma vizinhança de $\mathbf{b}$ em $\mathbb{R}^n$, $g(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ e $g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x}$ numa vizinhança de $\mathbf{a}$. Mostre que se f é diferenciável em $\mathbf{a}$ e g é diferenciável em $\mathbf{b}$, então $Df(\mathbf{b}) = [Df(\mathbf{a})]^{-1}$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que $f(0, 0, 0) = (1, 1)$ e
$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Considerando $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$g(x, y) = (e^{x^2+y^2}, x + y),$$
calcule $D(g \circ f)(0, 0, 0)$.

4. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por
$$\begin{aligned} f(x, y) &= (e^{2x+y}, 3y - \cos(x), x^2 + y + 2), \\ g(x, y, z) &= (3x + 2y + z^2, x^2 - z + 1). \end{aligned}$$
Calcule $D(g \circ f)(0, 0)$ e $D(f \circ g)(0, 0, 0)$.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = f(x, y, g(x, y))$.

   a) Encontre DF em termos das derivadas parciais de f e g.

   b) Se $F(x, y) = 0$ para todo (x, y), encontre D_1g e D_2g em termos das derivadas parciais de f.

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ funções definidas por
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

e $g(x,y) = (x, y + x^2)$. Mostre que as derivadas direcionais de f e g existem em qualquer direção, mas existe um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ no qual $\dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ não existe.