

Lista 2 - MAT0236 Funções Diferenciáveis e Séries

Professor Thiago Grando

15 de março de 2018

1. Mostre que a função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em x_0 :

a) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) $X = \mathbb{R}$, $Y = (\mathbb{R}^2, d_i)$, $f(x) = (\sin(x), \cos(x))$ e $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

c) $X = (\mathbb{R}^2, d_i)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = x^2 - y^2$ e $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

d) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $x_0 = 1$.

2. Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{xe^{x^2y}}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$, determine $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 0)$ onde $\mathbf{u} = (1, 0)$.

3. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x, y)$, para $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{u} = (0, 1)$.

b) f é contínua em $(0, 0)$?

c) Existe $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} \neq (0, 0)$?

d) f é diferenciável em $(0, 0)$?

4. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.
- b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x, y)$, para $\mathbf{u} = (1, 0)$ e $\mathbf{u} = (0, 1)$.
- c) f é diferenciável em $(0, 0)$?
- d) As funções $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ do item b) são contínuas em $(0, 0)$?
- e) Calcule $Df(0, 0)$.
- f) É verdade que $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = Df(0, 0) \cdot \mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \neq (0, 0)$?
5. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Para que vetores $\mathbf{u} \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ existe?
- b) Existe $D_1 f$ e $D_2 f$ em $(0, 0)$?
- c) f é diferenciável em $(0, 0)$?
- d) f é contínua em $(0, 0)$?
6. Repita o exercício 5 para as seguintes funções:

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y - x)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

c) $f(x, y) = |x| + |y|$

d) $f(x, y) = |xy|$

7. Sejam $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ não-nulo e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mostre que se existe $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$ então $\frac{\partial f}{\partial(\lambda \mathbf{u})}(\mathbf{a})$ existe e é igual a $\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a})$.
8. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |xy|$ é diferenciável em $(0, 0)$ mas não é de classe $\mathcal{C}^1$ em qualquer vizinhança de $(0, 0)$.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin(1/t) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

- a) Mostre que f é diferenciável em 0 e calcule $f'(0)$.
 - b) Calcule $f'(t)$ para $t \neq 0$.
 - c) Mostre que f' não é contínua em 0.
10. Sejam $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ não-nulo e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mostre que se $D_i f$ existe e é limitada numa vizinhança de $\mathbf{a}$, para todo i , então f é contínua em $\mathbf{a}$.
11. A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

é chamada de **transformação em coordenadas polares**.

- a) Calcule Df e $\det Df$.
 - b) Se $S = [1, 2] \times [0, \pi]$, determine e faça um esboço de $f(S)$.
12. Repita o exercício 11 para f e S , abaixo:
- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
 - b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ e $S = [0, 1] \times [0, \pi]$.
 - c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(r, \phi, \theta) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \cos(\phi), r \cos(\phi))$ e $S = [1, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Essa função é chamada de **transformação em coordenadas esféricas**.

13. Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana e a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Mostre que existe $D_1 f$ e $D_2 f$ em $(0, 0)$.
- b) Calcule $D_1 f(x, y)$ e $D_2 f(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
- c) Mostre que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.
- d) Mostre que existe $D_2 D_1 f$ e $D_1 D_2 f$ existem em $(0, 0)$, mas não são iguais.