Instituto de Matemática e Estatística da USP - IME - USP

MAT 0236 - 2a. avaliação - 3^o semestre BCC

Prof. Thiago Grando

21/05/2018

Nome : GABARITO

N^o USP :

Assinatura :

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

Justificar todas as afirmações!

Boa Prova!

Q1. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ função definida por $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$.

0,3 a) Mostre que f é de classe C^1.

0,3 b) Calcule $Df(x,y)$.

1,6 c) Mostre que f é inversível com inversa f^{-1} de classe C^1.

0,3 d) Determine f^{-1}.

det $\neq 0$ 0,4 0,4
injet. 0,4 0,2
sobrej. 0,4 ?
apl. do teo. 0,4

<u>SOLUÇÃO</u> :

a) $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$D_1 f_1(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 f_1(x,y) = D_1 f_2(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

O domínio de $D_i f_j(x,y)$, $i,j = 1,2$ é $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Portanto $D_i f_j(x,y)$ são funções contínuas (racionais).

b) $$Df(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{bmatrix}$$

$$\det Df(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left((y^2-x^2)(x^2-y^2) - 4x^2y^2\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(-(x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(-x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4x^2y^2\right)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left(-x^4 - 2x^2y^2 - y^4\right)$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^4} \cdot (x^2+y^2)^2 = \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \neq 0$$

Logo $Df(x,y)$ é não-singular, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,$

Sejam (x,y), $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tais que

$$f(x,y) = f(a,b) \implies \| f(x,y) \| = \| f(a,b) \| \implies$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} \implies \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\implies \| (x,y) \| = \| (a,b) \| \implies$$

$$\frac{1}{\| (a,b) \|^2} \cdot (x,y) = f(x,y) = f(a,b) = \frac{1}{\| (a,b) \|^2}(a,b) \implies (x,y) = (a,b)$$

Portanto f é injetora

CONTINUAÇÃO 1-c:

Verifiquemos que f é sobrejetora:

Chame $u = (x,y)$, logo,

$$f(u) = \frac{1}{\|u\|^2} \cdot u .$$

Dado $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ defina $u := \frac{w}{\|w\|^2} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Então:

$$f(u) = f\left(\frac{w}{\|w\|^2}\right) = \frac{1}{\left\|\frac{w}{\|w\|^2}\right\|^2} \cdot \frac{w}{\|w\|^2}$$

$$= \|w\|^2 \cdot \frac{w}{\|w\|^2} = w$$

Logo f é sobrejetora, ou seja

$$f(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Ptto f é bijetora e logo inversível.

Pelo TEOREMA 8, a inversa de f,

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é de classe C^1.

d) Do ítem anterior, $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{($

é definida por $f^{-1}(x,y) = \dfrac{1}{\|(x,y)\|^2} \cdot (x,y)$.

Q2. (2,5)

a) O sistema de equações

$$\begin{cases} x + v = uy \\ xv = u - y \end{cases}$$

1,5 define x e y como funções de u e v, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, para $1 + uv \neq 0$. Encontre $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v}$.

1,0 b) Determine um par de funções $x = x(u, y)$, $v = v(u, y)$ dadas implicitamente por esse sistema.

<u>SOLUÇÃO</u>: Deriva em rel. a var. u:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(x + v) = \dfrac{\partial}{\partial u}(u \cdot y) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}(x \cdot v) = \dfrac{\partial}{\partial u}(u - y) \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = y \cdot \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial u}}_{=1} + u \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] v \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} = \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial u}}_{=1} - \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} - u \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} = y \\[2ex] v \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u} = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Logo, $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\begin{vmatrix} y & -u \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{y+u}{1+u\cdot v}$ e

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y \\ v & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 - v\cdot y}{1+u\cdot v}$$

Deriva o sistema em rela. a vár V :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}(x+v) = \dfrac{\partial}{\partial v}(u\cdot y) \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(x\cdot v) = \dfrac{\partial}{\partial v}(u-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} = u\cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ x + v\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} - u\dfrac{\partial y}{\partial v} = -1 \\ v\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial v} = -x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -x \end{bmatrix}$$. Logo,

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -u \\ -x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-xu}{1+u\cdot v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ v & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -u \\ v & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x+v}{1+u\cdot v}$$

CONTINUAÇÃO 2-b:

$$\begin{cases} x + v = uy & (I) \longrightarrow x = uy - v \\ xv = u - y & (II) \end{cases}$$

Substituindo em (II), temos:

$$(uy - v) \cdot v = u - y$$

$$uv \cdot y - v^2 = u - y$$

$$u \cdot vy + y = u + v^2$$

$$\boxed{y = \frac{u + v^2}{1 + uv}}$$

Substituindo y em (I):

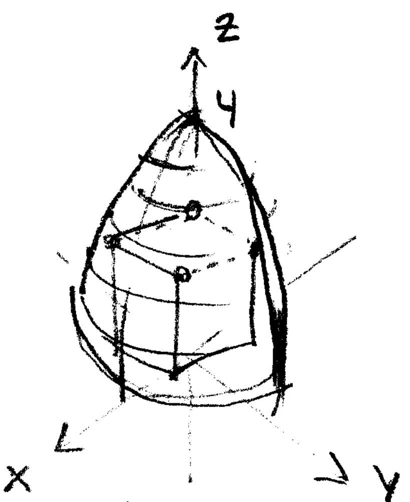
$$x + v = u \cdot \left(\frac{u + v^2}{1 + u \cdot v}\right)$$

$$x + v = \frac{u^2 + uv^2}{1 + u \cdot v}$$

$$x = \frac{u^2 + uv^2}{1 + u \cdot v} - v = \frac{u^2 + \cancel{uv^2} - v - \cancel{uv^2}}{1 + u \cdot v}$$

$$\boxed{x = \frac{u^2 - v}{1 + u \cdot v}}$$

Q3. (2,5) Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.



SOLUÇÃO :

$V(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$;

$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z - 4 = 0\}$;

V é função de classe C^1;

$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z - 4$ é de classe C^1;

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 1) \neq \vec{0}$.

Se (x,y,z) for ponto de máximo ou de mínimo local de V em B, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla V(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z)$$

Ou seja,
$$\begin{cases} yz = 2\lambda x & (\mathrm{I}) \\ xz = 2\lambda y & (\mathrm{II}) \\ xy = \lambda & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, então $\begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$, logo $xyz = 0$.

Se $x = 0$, $y, z \in \mathbb{R}$ qqer, $z > 0$, logo $z = 4 - y^2$;

Se $y = 0$, $x, z \in \mathbb{R}$ qqr, $z > 0$, logo $z = 4 - x^2$;

Nesse caso não conseguimos formar paralelepípedo.

Então $\lambda \neq 0$. De (III) temos x e $y \neq 0$.

Substituindo (III) em (I) e (II):

$$yz = 2(xy)\cdot x \quad e \quad xz = 2(xy)\cdot y$$

$$yz = 2x^2y \quad e \quad xz = 2xy^2$$

$$z = 2x^2 \quad e \quad z = 2y^2$$

Logo $x^2 = y^2$. Como $(x, y, z) \in B$, então:

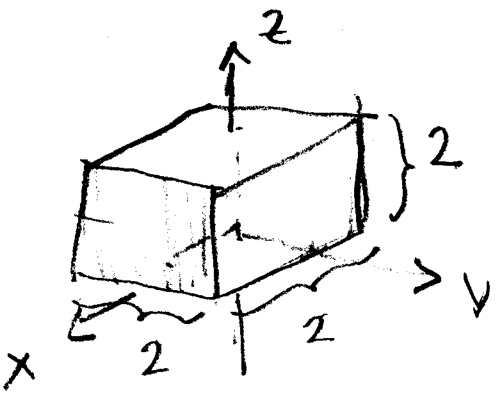
$$x^2 + x^2 + 2x^2 = 4$$

$$4x^2 = 4$$

$$\boxed{x = \pm 1} \Longrightarrow \boxed{y = \pm 1} \Longrightarrow \boxed{z = 2}$$

VÉRTICES QUE INTERCEPTAM O PARABOLÓIDE:

$$(\pm 1, \pm 1, 2)$$



$$V = 2\cdot 2\cdot 2 = 8\,u^3 \,//$$

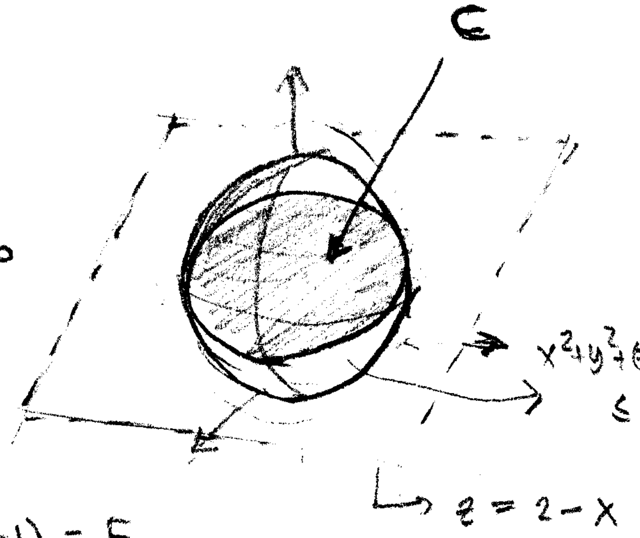
DIMENSÕES: $\begin{cases} 2\,u.c. \\ 2\,u.c. \\ 2\,u.c. \end{cases}$

Q4. (2,5) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função definida por $f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z^2$ e o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 5 \text{ e } x + z = 2\}.$$

0,5 a) Faça um esboço de C no espaço e argumente sobre a existência de pontos extremantes de f em C.

2,0 b) Determinar os pontos de máximo e de mínimo de f em C.



SOLUÇÃO:

a) o conjunto C é fechado e limitado do $\mathbb{R}^3$, pois é um círculo contido no plano $z = 2 - x$ delimitado pela esfera $x^2+y^2+(z-1) = 5$.

f é contínua em C. Pelo Teorema de Weierstrass f atinge seus extremos em C.

b) $B_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$

onde $g(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2-5$ e $h(x,y,z) = x+z-2$.

f é diferenciável e h, g são funções de classe C^1 (verifica

Logo, se (x,y,z) é ponto de máximo ou de mínimo de f em B_1, o conjunto $\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y$

é LD. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} & & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo

$$\begin{cases} 4(3xy+y)=0 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=5 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (2,0,0),\ (-1,0,3)$$

$$\text{e } \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

são soluções do sistema.

Buscando candidatos no plano:

$$B_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z = 2-x\}$$

Se (x,y,z) é ponto de máx. ou de mínimo de f em B_2 o conjunto $\{\nabla f(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\}$ é LD, ou seja

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4x & -2y & -2z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=-2x \\ z=2-x \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (-2,0,4)$$

mas $(-2)^2+0^2+(4-1)^2 > 5$, ou seja, $(-2,0,4) \notin C$.

$$f(2,0,0) = 8$$

$$f(-1,0,3) = -7$$

$$f\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{75}{9}$$

$(2,0,0) \to$ PTO DE MÁXIMO DE f em C;

$\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt{7}}{3}, \frac{7}{3}\right) \to$ PTOS. DE DE MÍNIMO DE f em C.