Instituto de Matemática e Estatística da USP - IME - USP

MAT 0236 - Primeira avaliação - 3º semestre BCC

Prof. Thiago Grando

16/04/2018

Nome : GABARITO

Nº USP : ____________________

Assinatura : ____________________

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

Justificar todas as questões.
Boa Prova!

Q1. (2,5)

a) Mostre que a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$ é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

b) Considere $\mathbb{R}^2$ com a métrica da soma, $\mathbf{x} = (-1, 0)$ e $r = 1$. Encontre a expressão que define $B_r(\mathbf{x})$ e faça um esboço desse conjunto no plano.

c) Verifique se o conjunto $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^2$. F é um compacto $\mathbb{R}^2$?

SOLUÇÃO:

a) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, onde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

1º: $d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y$ pois é soma de números positivos.

2º: $d(x,y) = 0 \iff$

$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \iff$

$x_1 - y_1 = 0$ e $x_2 - y_2 = 0 \iff x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2 \Rightarrow$

$x = y$

3º: $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$= |(-1)(y_1 - x_1)| + |(-1)(y_2 - x_2)|$

$= |-1||y_1 - x_1| + |-1||y_2 - x_2|$

$= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d(y,x)$

$\underline{\underline{4^o}}$: $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$$= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$$

$$\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

$$= \underbrace{|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|}_{d(x,z)} + \underbrace{|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|}_{d(z,y)}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

p/ qqer $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto d é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

b) $B_r(x) = B_1(-1,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(-1,0)) < 1\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-(-1)| + |y-0| < 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+1| + |y| < 1\}.$$

Primeiro, iremos fazer um esboço da fronteira de $B_1(-1,0)$:

$$|x+1| + |y| = 1 \implies$$

$$|x+1| = 1 - |y|$$

CONTINUAÇÃO Q1 - b) :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Se $x \geq -1$, então $|x+1| = x+1$, logo:

$$x+1 = 1-|y| \Rightarrow$$

$$|y| = -x$$

Se $y \geq 0$ então $|y| = y$, logo $\boxed{y = -x}$ (I)

Se $y < 0$ então $|y| = -y$, logo $\boxed{y = x}$ (II)

Se $x < -1$, então $|x+1| = -x-1$, logo

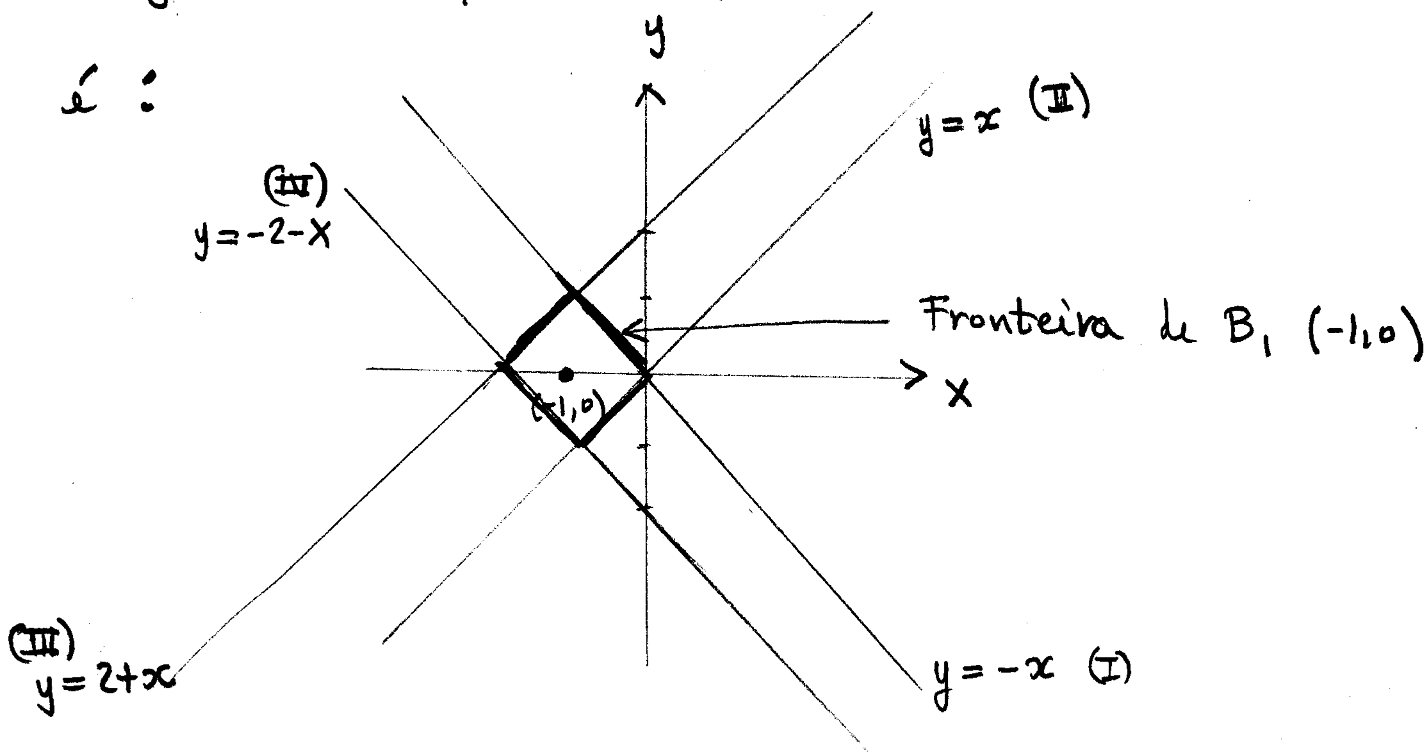
$$-x-1 = 1-|y| \Rightarrow$$

$$|y| = 2+x$$

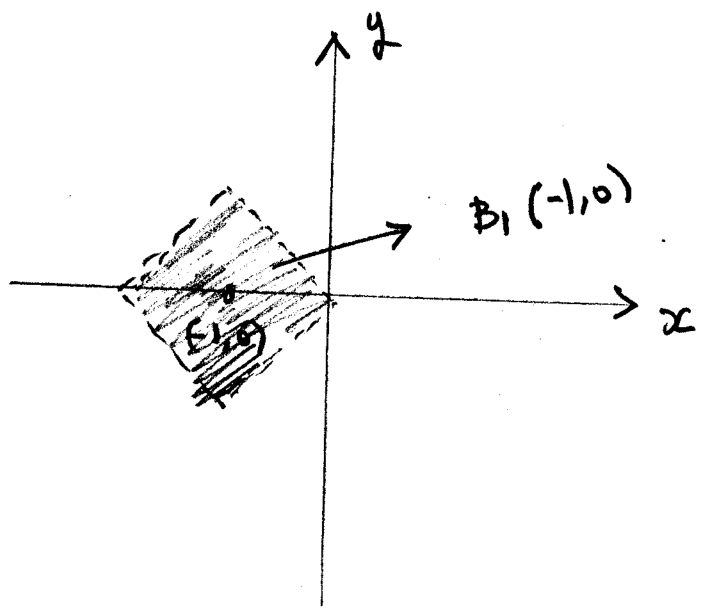
Se $y \geq 0$, então $|y| = y$, logo $\boxed{y = 2+x}$ (III)

Se $y < 0$, então $|y| = -y$, logo $\boxed{y = -2-x}$ (IV)

Logo o esboço da fronteira de $B_1(-1,0)$ é:



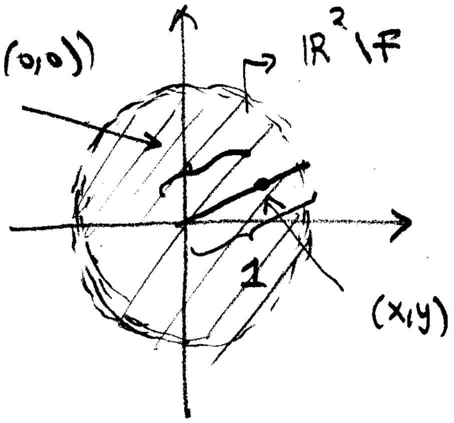
Ptto, o esboço de $B_1(-1,0)$ é:



c) Vejamos que $\mathbb{R}^2 \setminus F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1 \}$ é um conjunto aberto.

Tome $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$.

Defina $r := 1 - d((x,y),(0,0))$.



$\underline{\underline{1^o}}$: $r > 0$

$$d((x,y),(0,0)) < 1 \implies$$

$$-d((x,y),(0,0)) > -1 \implies$$

$$+1 \qquad\qquad +1$$

$$r =: 1 - d((x,y),(0,0)) > 1-1 = 0 \implies r > 0$$

$\underline{\underline{2^o}}$ $B_r(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$:

Seja $u \in B_r(x,y)$. Então

$$d(u,(x,y)) < r := 1 - d((x,y),(0,0))$$

Logo:

$$d(u,(0,0)) \leq d(u,(x,y)) + d((x,y),(0,0)) < 1$$

↑ desigualdade triangular

Logo $d(u,(0,0)) < 1$, ou seja $u \in \mathbb{R}^2 \setminus F$.

Q2. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, onde

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) &= (xy)^{1/3} \\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) &= e^{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

a) Verifique se f é contínua em $(0,0)$.

b) Usando a definição de diferenciabilidade, verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

SOLUÇÃO :

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (xy)^{1/3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^{1/3} \cdot y^{1/3} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^{1/3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^{1/3} = 0 = f_1(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2} \cdot e^{y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{y^2} = 1 = f_2(0,0)$$

Portanto, f_1 e f_2 são contínuas em $(0,0)$. Ou seja f é contínua em $(0,0)$.

b)

1º: Verifiquemos se f_1 é diferenciável em $(0,0)$

$$D_1 f_1(0,0) = \frac{\partial f_1}{\partial e_1}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_1((0,0)+te_1) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f_1(t,0) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Da mesma maneira, podemos verificar que $D_2 f_1(0,0) = 0$. Dessa maneira, a candidata a derivada de f_1 em $(0,0)$ é a matriz 1×2

$$B_1 := [D_1 f_1(0,0) \quad D_2 f_1(0,0)]$$
$$= [0 \quad 0].$$

Calculamos o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1((0,0)+h) - f_1(0,0) - B\cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(h_1,h_2) - f_1(0,0) - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

CONTINUAÇÃO Q2 – b:

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1 \cdot h_2)^{1/3} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1 \cdot h_2)^{1/3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$ Esse limite não existe pq o limite da restrição de $\frac{(h_1 h_2)^{1/3}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ sobre a curva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t,t)$, não existe quando $t \to 0$. Vejamos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t \cdot t)^{1/3}}{\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{2/3}}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{2/3}}{\sqrt{2}\cdot|t|}.$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t^{2/3}}{\sqrt{2}|t|} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{2/3}}{\sqrt{2}\,t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{t}} = +\infty$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t^{2/3}}{\sqrt{2}|t|} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t^{2/3}}{-\sqrt{2}\cdot t} = -\infty.$$ Portanto f_1 não é diferenciável em $(0,0)$. Pelo TEOREMA 4-a, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Q3. (2,5) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, onde

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) &= \cos(\sqrt[3]{x^2+y^2}) \\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x,y) &= x+y. \end{aligned}$$

a) Verifique se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule, caso exista, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$, onde $\mathbf{u} = (1,1)$.

SOLUÇÃO: a) Se $(x,y) \neq (0,0)$ então

$$D_1 f_1(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial e_1}(x,y)$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x^2+y^2)^{1/3-1} \cdot 2x$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$$

Analogamente,

$$D_2 f_1(x,y) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$$

No $(0,0)$:

$$D_1 f_1(0,0) = \frac{\partial f_1}{\partial e_1}(0,0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f_1((0,0)+te_1) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{\cos(t^{2/3}) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{t}_{\to 0}}$$

As funções do numerador e denominador são diferenciáveis em $t = 0$. Pela Regra de L'Hopita

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-\operatorname{sen}(t^{2/3}) \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{-1/3}}{1} =$$

$$= \lim_{t \to 0} -\frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(t^{2/3}) \cdot t^{1/3}}{t^{1/3} \cdot t^{1/3}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{-\frac{2}{3} \cdot t^{1/3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(t^{2/3})}{t^{2/3}}}_{\to 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

Analogamente,

$$D_2 f_1(0,0) = 0.$$

Logo,

CONTINUAÇÃO Q3 - a :

$$D_1 f_1(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \cdot sen\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right), & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$D_2 f_1(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \cdot sen\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right), & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$ então D_1 e D_2 são funções contínuas já que são produtos de funções contínuas

No $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_1 f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} \cdot sen\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)^2} \cdot sen\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \cdot \frac{sen\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} =$$

CONTINUAÇÃO Q3 - a :

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\underbrace{-\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{\text{limitada}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}}_{\to 1}$$

$$= 0 \cdot 1 = 0 = D_1 f_1 (0,0) .$$

Analogamente, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} D_2 f_1 (x,y) = D_2 f_1 (0,0)$.

Portanto $D_1 f_1$ e $D_2 f_1$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, logo f_1 é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Além disso,

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f_2 (x,y) = 1 \\ D_2 f_2 (x,y) = 1 \end{array}\right. , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \text{ Logo}$$

$D_1 f_2$ e $D_2 f_2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ pois são funções constantes. Ou seja, f_2 é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

Portanto f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

b) Como f é C^1 em $\mathbb{R}^2$, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Pelo TEOREMA 1, todas as derivadas direcionais existem em $(0,0)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = Df(0,0) \cdot u, \qquad \forall\, u \neq (0,0)$$

Assim,

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(0,0) & D_2 f_1(0,0) \\ D_1 f_2(0,0) & D_2 f_2(0,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, se $u = (1,1)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Q4. (2,5) Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que $f(0,0,0) = (0,0)$ e

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = xe^{\sqrt[3]{x^2+y^4}},$$

calcule $D(g \circ f)(0,0,0)$.

<u>SOLUÇÃO</u>: Como $Df(0,0,0)$ existe, então f é diferenciável em $(0,0,0)$. Vamos verificar se g é diferenciável em $f(0,0,0) = (0,0)$:

$$D_1 g(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g((0,0)+te_1) - g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g(t,0) - g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t}\, e^{\sqrt[3]{t^2}} - 0}{\cancel{t}} = \lim_{t \to 0} e^{\sqrt[3]{t^2}} = 1$$

$$D_2 g(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

A candidata a derivada de g em $(0,0)$ é a matriz 1×2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g((0,0)+h) - g(0,0) - B\cdot h}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{g(h_1,h_2) - 0 - \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 e^{\sqrt[3]{h_1^2+h_2^4}} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$ Observe que,

se $h_1 = 0$ e $h_2 \neq 0$ esse limite é igual a 0.

se $h_1 \neq 0$ e $h_2 \neq 0$ então

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{limitada}} \underbrace{\left(e^{\sqrt[3]{h_1^2+h_2^4}} - 1\right)}_{\to 0} = 0.$$ Ptto g

é diferenciável em $(0,0) = f(0,0,0)$ e sua derivada é a matriz 1×2 $Dg(0,0) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$.

Como $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2 = \mathrm{Dom}(g)$, pelo TEOREMA 7,

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(0,0,0) &= Dg(f(0,0,0))\cdot Df(0,0,0) \\ &= Dg(0,0)\cdot Df(0,0,0) \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

//