NÚMEROS COMPLEXOS - UNESP

Forma Algébrica

01. (Unesp/99) Considere o número complexo $z = i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de $z^4 + z^3 + z^2 + z + \frac{1}{z}$ é

a) – 1 b) 0 c) 1 d) i e) –i

02. (Unesp/07) Sendo i a unidade imaginária e z_1 e z_2 os números complexos

$$z_1 = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{22}$$
$$z_2 = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{78}$$

O produto $z_1 \cdot z_2$ resulta em

a) $1+i$ b) $1-i$ c) $2i$ d) $-2i$ e) 2

03. (Unesp/84) Para o complexo *i*, a soma $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$, n natural, $n > 1$, é zero, se e somente se:

a) $n = 4$
b) n é múltiplo de 4
c) $n > 4$
d) $n = 4^k$, $k = 1, 2, \ldots$
e) n é par

04. (Unesp/03) Se $z = (2+i)\cdot(1+i)\cdot i$, então $\bar{z}$, o conjugado de *z*, será dado por

a) $-3-i$ b) $1-3i$ c) $3-i$ d) $-3+i$ e) $3+i$

05. (Unesp/87) O número complexo $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1987}$ é igual a:

a) $-i$ b) i c) -1 d) 1 e) $2i$

06. (Unesp/07) Dada a expressão $A = \frac{5-ix}{5x-9i}$, em que $x \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária, quais são os valores de x que tornam A real? Para esses valores de x, quais são os resultados de A?

07. (UFPE) Determine *a* real e positivo tal que o número complexo $\frac{2-ai}{1+2ai}$ tenha parte real nula, onde $i = \sqrt{-1}$.

08. (UFSCar) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $z = x + yi$ um número complexo.
a) Calcule o produto $(x + yi)\cdot(1+i)$
b) Determine x e y, para que se tenha $(x + yi)\cdot(1+i) = 2$

09. (Unesp/06) Se *a*, *b*, *c* são números inteiros positivos tais que $c = (a+bi)^2 - 14i$, em que $i^2 = -1$, o valor de *c* é
a) 48 b) 36 c) 24 d) 14 e) 7

10. (Unesp/08) Seja a função $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx + \theta$. Os valores de k e θ para que $1+i$ seja raiz da função $f(x)$ são, respectivamente,
a) 10 e –6 b) 2 e 0 c) 1 e 1 d) 0 e 1 e) –6 e 8

11. (Unesp/02) Seja $z = x + yi$ um número complexo, com x e y números reais e i a unidade imaginária.
a) Determine, em função de x e y, a parte real e a parte imaginária de $2z - i + \overline{z}$, com $\overline{z}$ indicando o conjugado de z
b) Determine z que seja solução da equação $2z - i + \overline{z} = 0$

12. (Unesp/01) Considere os números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = x + 2i$, onde i é a unidade imaginária e x é um número real. Determine:
a) o número complexo $z_1 \cdot z_2$ em função de x
b) os valores de x tais que $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) \le \mathrm{Im}(z_1 \cdot z_2)$, onde Re denota a parte real e Im denota a parte imaginária do número complexo.

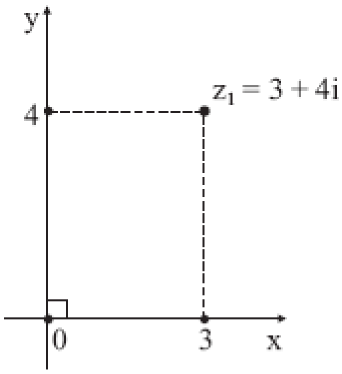
13. Um quadrado ABCD está inscrito num círculo com centro na origem. O vértice A coincide com o afixo do número complexo $3 + 4i$. Qual é o afixo de um dos outros três vértices?
a) $3 - 4i$ b) $-2 + i$ c) $-4 + 3i$ d) $2 - i$ e) $1 - 2i$

14. (Uece 2010) No plano complexo, o número $z = 2 - 3i$ é o centro de um quadrado e $w = 5 - 5i$ é um de seus vértices. O vértice do quadrado não consecutivo a w é o número complexo
a) $2 - 2i$
b) $1 - i$
c) $-1 - i$
d) $-2 - 2i$

15. (FGV/12) É dada a matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 1 \\ 1+i & 1 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$ sendo i a unidade imaginária: $i^2 = -1$.
a) Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, substituindo os elementos da matriz A pelos seus números complexos conjugados, ou seja, b_{ij} é o complexo conjugado do elemento a_{ij}.

b) Determine a área do triângulo cujos vértices são os afixos dos elementos b_{23} e b_{32} e o afixo do determinante da matriz B.

16. (Unifesp/05) Dados os números complexos $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = i \cdot z_1$ e $z_3 = -i \cdot z_1$, calcule:



a) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta determinado pelos pontos z_2 e z_3
b) a altura do triângulo de vértices z_1 , z_2 e z_3 , com relação ao vértice z_1

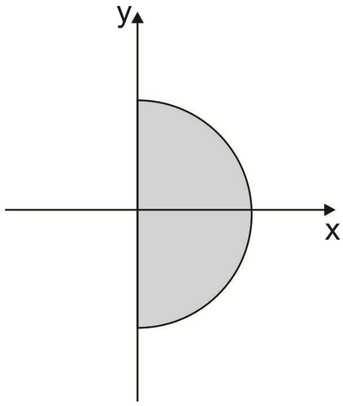
17. (UFTM/07) Seja x um número real que satisfaz a expressão $z = (x - 2) + i \cdot (x + 5)$ onde i é a unidade imaginária e $z \in \mathbb{C}$. Admitindo-se que $|z| = 5$, então o produto dos números complexos, que satisfazem essa expressão, é igual a
a) $25 - 10i$ b) $-10i$ c) $-25i$ d) $25i$ e) $10 + 25i$

18. (Unesp/07) Considere os números complexos $w = 4 + 2i$ e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de $z \cdot w$, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

19. (Unesp/05) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.
a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$.
b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, de modo que os números complexos z, w e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

20. (Unesp/04)
Considere os números complexos $w = 2i$ e $z = 1 + i$.
Determine:
a) z^2 e ($w^2 \cdot \bar{z} + w$), onde $\bar{z}$ indica o conjugado de z .
b) $|z|$ e $|w|$. Mostre que a seqüência (1, $|z|$, $|w|$, $|zw|$, $|w^2|$) é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

21. (Unesp/06) A figura representa, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem e raio 1.



Indique por $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ e $|z|$ a parte real, a parte imaginária e o módulo de um número complexo $z = x + yi$, respectivamente, onde i indica a unidade imaginária. A única alternativa que contém as condições que descrevem totalmente o subconjunto do plano que representa a região sombreada, incluindo sua fronteira, é:

a) $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ e $|z| \leq 1$

b) $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ e $|z| \leq 1$

c) $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ e $|z| \geq 1$

d) $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ e $|z| \geq 1$

e) $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ e $|z| \leq 1$

22. (Unesp/12) Identifique o lugar geométrico das imagens dos números complexos *Z*, tais que $|z| + |3 \cdot z| = 12$.

Forma Trigonométrica

23. (Unesp/05) Seja o número complexo $z = 10 + 10i$, no qual $i = \sqrt{-1}$. A forma trigonométrica que representa este número é

a) $10 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2})$

b) $10 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$

c) $10\sqrt{10} \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6})$

d) $10\sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2})$

e) $10\sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})$

24. (Unesp/93) Considere o número complexo $u=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, onde $i=\sqrt{-1}$. Encontre o número complexo v cujo módulo é igual a 2 e cujo argumento principal é o triplo do argumento principal de u.

25. (FGV) O ponto P é o afixo de um numero complexo z e pertence à circunferência de equação. Sabendo-se que o argumento de z é 60º, pode-se afirmar que:

a) $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

b) $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

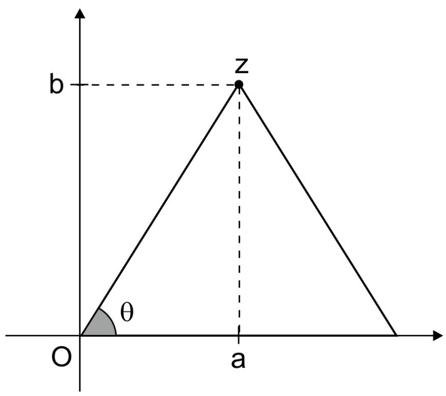
d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

e) $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$

26. (UFRGS) Os argumentos dos números complexos u e z são, respectivamente, $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4}$ e $|uz|=4$. Calcule a parte real e a parte imaginária de uz.

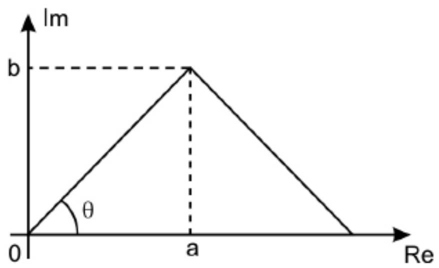
27. (UFRJ) Dados os números complexos $a=2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ e $b=3(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, determine o menor valor positivo de α, de modo que o produto $a\cdot b$ seja um número real.

28. (Unesp/09) O número complexo $z=a+bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura.



Sabendo que a área desse triângulo é igual a $36\sqrt{3}$, determine z^2.

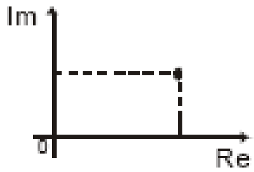
29. (AFA/11) O número complexo $z=a+bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura abaixo:



É correto afirmar que o conjugado de z^2 tem afixo que pertence ao

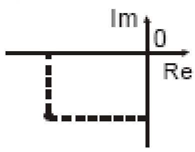
a) 1º quadrante
b) 2º quadrante
c) 3º quadrante
d) 4º quadrante

30. (UFF/01) O número complexo z, $|z| > 1$, está representado geometricamente a seguir.

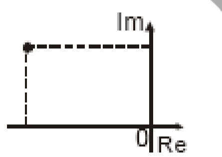


A figura que pode representar, geometricamente, o número complexo z^2 é:

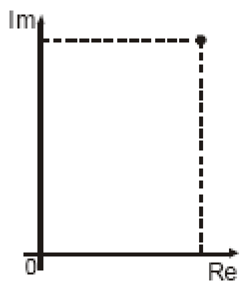
a)



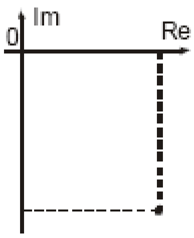
b)



c)



d)



e)

31. (UFU/04) Sejam z_1 e z_2 números complexos tais que $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1 + z_2 + i = 0$, em que $i^2 = -1$. Determine a área do triângulo cujos vértices são as representações geométricas de i, z_1 e z_2.

32. (MACK/99) Considere o complexo $z = a + bi$, $a > 0$ e $b > 0$, e o polígono dado pelos afixos de z, $-z$ e $-bi$. Se a área desse polígono é 5, então z pode ser:

a) $\frac{1}{2} + 8i$ b) $\frac{1}{2} + 4i$ c) $\frac{1}{3} + 9i$ d) $\frac{1}{3} + 15i$ e) $\frac{1}{2} + 14i$

33. (UFSCAR/06)
Seja a soma

$$S = \left(x + y + \frac{1}{z}\right) + \left(x^2 + 3y + \frac{1}{z^2}\right) + + \left(x^3 + 5y + \frac{1}{z^3}\right) + \left(x^4 + 7y + \frac{1}{z^4}\right) + \ldots$$

Considerando cada parcela da soma como sendo a expressão entre parênteses:
a) Determine o número complexo $a + bi$ que resulta da soma das 10 primeiras parcelas de S, quando x = 2, y = 1 e z é a unidade imaginária i.
b) Escreva, na forma trigonométrica, o número complexo que resulta da soma das duas primeiras parcelas de S, quando x = y = 0 e z = – i, e represente-o no plano Argand-Gauss.

34. (Unesp/95) Seja L o afixo do número complexo $a = \sqrt{8} + i$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy. Determine o número complexo b, de módulo igual a 1, cujo afixo M pertence ao quarto quadrante e é tal que o ângulo $L\hat{O}M$ é reto.

35. (Unesp/87) Considere a sequência $(z_1, z_2, ..., z_n, ...)$ de números complexos, cujo termo geral é

$$z_n = \sqrt{6n+3} + (n-1)i$$

(i = unidade imaginária). Determine n de maneira que o argumento de z_n seja igual a 30 graus.

36. (Unesp/89) Se $z = a + bi$ com $a > b > 0$ prove que

$$\text{tg}\,(2\arg z) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

37. (Unesp/92) Prove que o conjunto dos afixos dos números complexos pertencentes a

$$\{(2+\cos t) + i\,\text{sen}\,t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária), é uma circunferência de raio 1, com centro no afixo do número 2.

Potenciação e Radiciação

38. (Unesp/08) Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}$ O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

a) $-i$
b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) $i - 2$
d) i
e) $2i$

39. (Ufscar) Dado o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$, então z^6 é igual a:

a) $1 - 3\sqrt{3}\,i$ b) $-64i$ c) $6 + 6\sqrt{3}\,i$ d) $1 + 3\sqrt{3}\,i$ e) 64

40. (Unesp/85) A expressão $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{109}$, onde i é a unidade imaginária dos complexos, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ e) 1

41. (UFRGS/05) O ângulo formado pelas representações geométricas dos números complexos $z=\sqrt{3}+i$ e z^4 é

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) π

42. (Unesp/06) Seja $z=1+i$ um número complexo.
a) Escreva z e z^3 na forma trigonométrica.
b) Determine o polinômio de coeficientes reais, de menor grau, que tem z e $|z|^2$ como raízes e coeficiente dominante igual a 1.

43. (Unesp/10) As soluções da equação $z^3=i$, onde z é um número complexo e $i^2=-1$, são:

a) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $z=-i$

b) $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ou $z=-i$

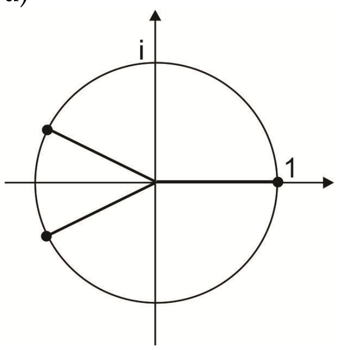
c) $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ou $z=-i$

d) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}i$ ou $z=-i$

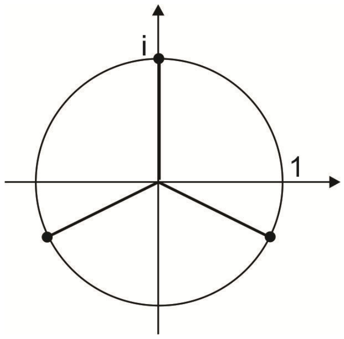
e) $z=\pm\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=-i$

44. (Unesp/90) O diagrama que melhor representa as raízes cúbicas de $-i$ é:

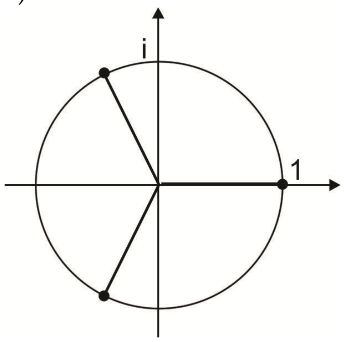
a)



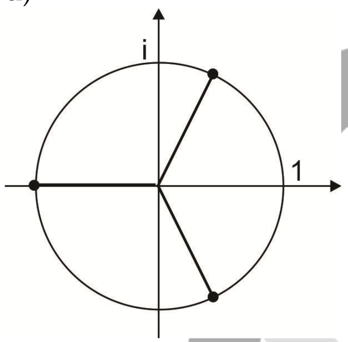
b)



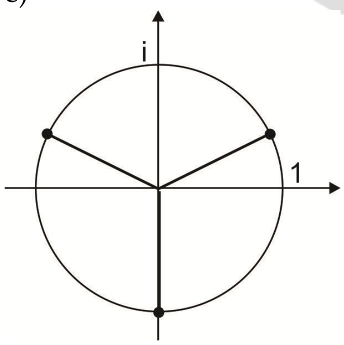
c)



d)



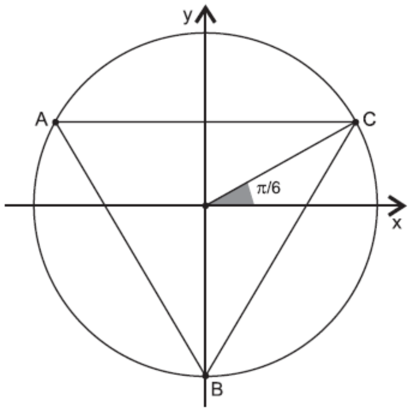
e)



45. (Unesp/08) As raízes de $x^4 - a = 0$ são os vértices de um quadrado no plano complexo. Se uma raiz é $1+i$ e o centro do quadrado é $0+0i$, determine o valor de a.

46. (Unesp/91) Sendo n um número natural, provar que o número complexo $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ é raiz da equação algébrica $x^{3n+2}+x+1=0$.

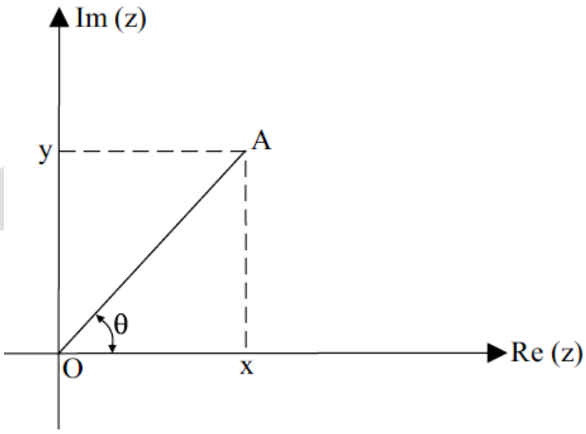
47. (UESC/09) Na figura, tem-se representado, no plano Argand-Gauss, um triângulo equilátero ABC inscrito numa circunferência com centro na origem e raio 2.



Se α é um número complexo e n um número natural, tais que as raízes n-ésimas de α são os números complexos representados pelos vértices do triângulo, então $(\alpha + n)$ é igual a

a) $8i$ b) $3+8i$ c) $3-8i$ d) $28+4\sqrt{3}\,i$ e) $(3+4\sqrt{3})+4i$

48. (Unifesp/11) No plano de Argand-Gauss (figura), o ponto A é chamado afixo do número complexo $z = x + yi$, cujo módulo (indicado por $|z|$) é a medida do segmento $\overline{OA}$ e cujo argumento (indicado por θ) é o menor ângulo formado como $\overline{OA}$, no sentido anti-horário, a partir do eixo $\text{Re}(z)$. O número complexo $z = i$ é chamado "unidade imaginária".



a) Determinar os números reais x tais que $z = (x+2i)^4$ é um número real.

b) Se uma das raízes quartas de um número complexo z é a complexo z_0, cujo afixo é o ponto $(0, a)$, $a > 0$, determine $|z|$.

GABARITO

01. E

02. D

03. B

04. A

05. B

06. $x = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$; $x = -3 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

07. $a = 1$

08. a) $(x - y) + (x + y)i$
b) $x = 1$ e $y = -1$

09. A

10. E

11. a) $\operatorname{Re}(z) = 3x$; $\operatorname{Im}(z) = y - 1$

b) $z = i$

12. a) $z_1 \cdot z_2 = (2x - 2) + (x + 4)i$

b) $x \leq 6$

13. C

14. C

15. a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1 \\ 1-i & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$

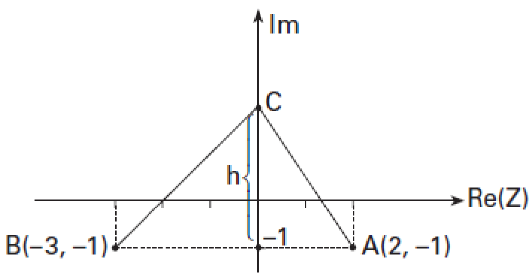
b) $S = 5$

16. a) (0, 0)
b) 5

17. C

18. $a = 3$

19. a) $z \cdot w = -7 + i$; $|w - z| = 5$
b)



$b = 7$

20. a) $z^2 = 2i$ e $w^2 \cdot \bar{z} + w = -4 + 6i$
b) $|z| = \sqrt{2}$ e $|w| = 2$. A PG é dada por
$(1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4)$.

21. E

22. Circunferência de centro (0, 0) e raio 3.

23. E

24. $v = 2i$

25. B

26. $\operatorname{Re}(uz) = 2$ e $\operatorname{Im}(uz) = 2\sqrt{3}$

27. $\alpha = 150^\circ$

28. $z^2 = -72 + 72\sqrt{3} \cdot i$

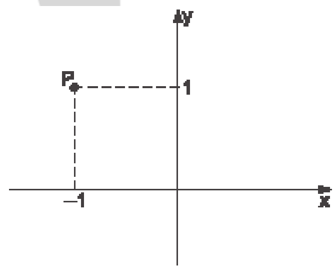
29. C

30. C

31. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

32. D

33. a) 2045 – i
b) $\sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 135^\circ)$



34. $b = \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{8}}{3}$

35. $n = 4$

36. Demonstração

37. Demonstração

38. D

39. E

40. D

41. D

42. a) $z = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$ e

$z^3 = 2\sqrt{2} \cdot (\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4})$

b) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

43. C

44. B

45. $a = -4$

46. Demonstração

47. B

48. a) $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
b) $|z| = a^4$