TRIGONOMETRIA - UNICAMP

Trigonometria Básica

01. (Unimontes) Dados $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $y = (1+\cos x)(1-\cos x)$ é:

a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\pm\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{2}$

02. (FGV/10) Sabendo que o valor da secante de x é dado por $\sec x = \frac{5}{4}$ em que x pertence ao intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ podemos afirmar que os valores de $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ são respectivamente:

a) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

c) $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ e $-\frac{4}{3}$

d) $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{3}$

e) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$

03. (PUC-MG/99) Se $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então, o valor de $\operatorname{sen}\alpha$ é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

04. (EN) Num triângulo retângulo, a hipotenusa é o triplo de um dos catetos. Considerando x o ângulo oposto ao menor lado, podemos afirmar que $\operatorname{tg} x + \sec x$ é igual a:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

05. (UFBA) Se M é tal que $M = \cos 5$, então:

a) $\cos\frac{3\pi}{2} < M < \cos\frac{7\pi}{4}$

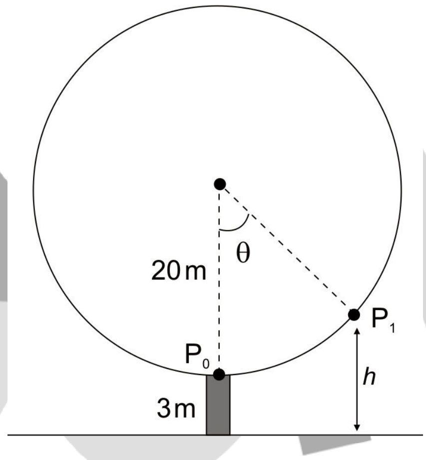
b) $\cos\frac{\pi}{2} < M < \cos\pi$

c) $\cos\pi < M < \cos\frac{5\pi}{4}$

d) $\cos\frac{7\pi}{4} < M < \cos 2\pi$

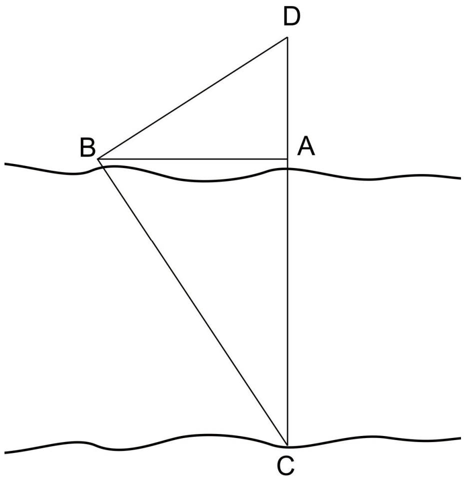
e) $M > \cos\frac{\pi}{4}$

06. Considere a figura abaixo que representa um modelo simplificado de uma roda gigante. Seja θ o ângulo central do arco descrito por uma criança que sai da posição P_0 e vai até a posição P_1. Determine a altura dessa criança em relação ao solo em P_1 quando:
a) $\theta = 30°$
b) $\theta = 120°$



07. (Unicamp/93) Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto A a um ponto B, cobrindo a distância AB = 1200 metros. Quando em A ele avista um navio parado em N de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60º, e quando em B, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45º.
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita
b) Calcule a que distância se encontra o navio da praia.

08. (Unicamp/92) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio um homem usou o seguinte procedimento : localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60º ; determinou o ponto D no prolongamento de $\overline{CA}$ de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse de 90º. Medindo AD = 40 metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.

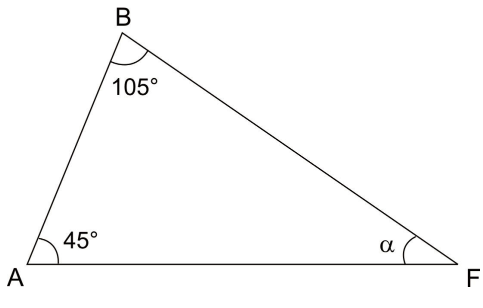


09. (Unicamp/90) O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem, de modo que a cada volta completa da engrenagem o ponteiro dá 1/4 de volta em um mostrador graduado de 0º até 360º. No início da medição o ponteiro encontra-se na posição 0º. Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4 135 voltas?

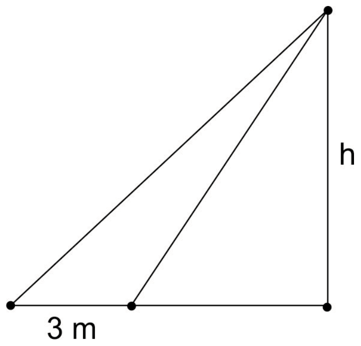
10. (Unicamp/92) Um relógio foi acertado exatamente ao meio dia. Determine as horas e minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor ter percorrido um ângulo de 42º.

11. Um observador O, na mediatriz de um segmento AB e a uma distância d de AB, vê esse segmento sob um ângulo. O observador afasta-se do segmento ao longo da mediatriz até uma nova posição O' de onde ele vê o segmento sob o ângulo $\alpha/2$. Expresse a distância $x = OO'$ em termos de α e d.

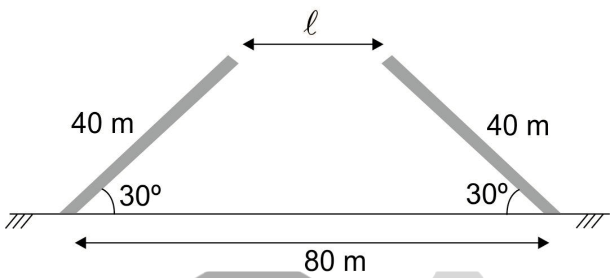
12. (Unicamp) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio florestal em F. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 45º$ e $F\hat{B}A = 105º$ e a distância $AB = 15$ km, determine as distâncias AF e BF.



13. (UEM) Um balão parado no céu é observado sob um ângulo de 60º. Afastando-se 3 metros, o observador passa a vê-lo sob um ângulo α tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Determine a altura do balão. Multiplique o resultado por $11(6-\sqrt{3})$.

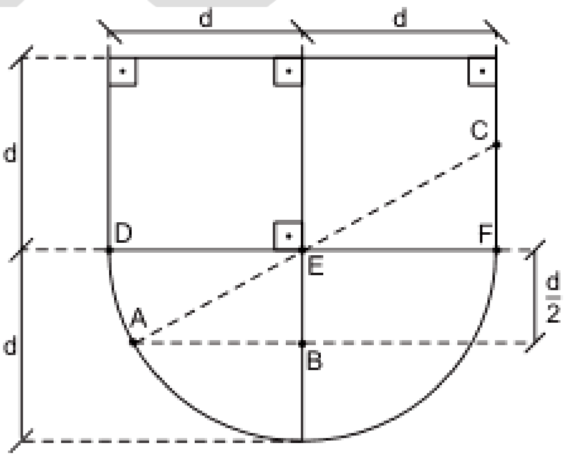


14. (UFOP/09) Uma ponte elevadiça está construída sobre um rio cujo leito tem a largura igual a 80 m, conforme ilustra a figura. A largura l do vão entre as rampas dessa ponte, quando o ângulo de elevação das rampas é de 30º vale:



a) $50-\sqrt{3}$
b) $4(20-10\sqrt{3})$
c) $4(10-20\sqrt{3})$
d) $20(4-\sqrt{3})$

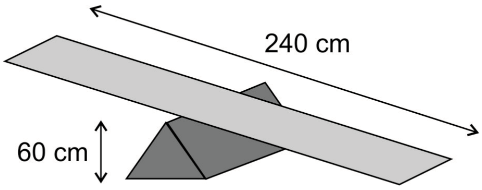
15. (FGV/05) Na figura estão representados dois quadrados de lado *d* e dois setores circulares de 90º e raio *d*:



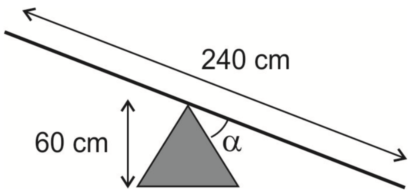
Sabendo que os pontos *A*, *E* e *C* estão alinhados, a soma dos comprimentos do segmento *CF* e do arco de circunferência *AD*, em função de *d*, é igual a:

a) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\pi)}{6}d$ b) $\dfrac{(3+\pi)}{6}d$ c) $\dfrac{(4\sqrt{3}+\pi)}{12}d$ d) $\dfrac{(12+\pi)}{24}d$ e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\pi)}{12}d$

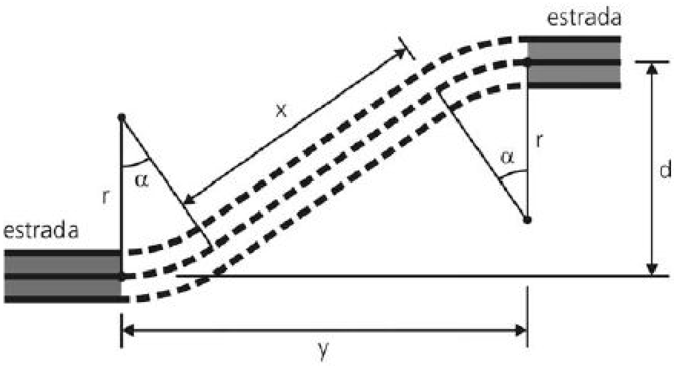
16. Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.



a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra está a 20 cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.
b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida abaixo.

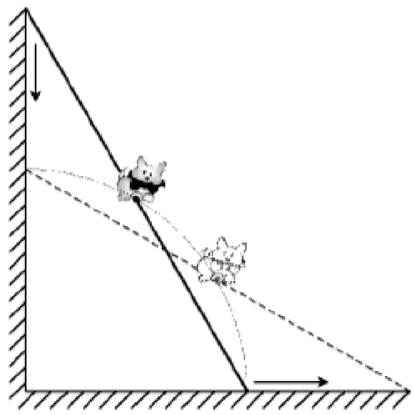


17. (Unicamp/11) Um engenheiro precisa interligar de forma suave dois trechos paralelos de uma estrada, como mostra a figura abaixo. Para conectar as faixas centrais da estrada, cujos eixos distam d metros um do outro, o engenheiro planeja usar um segmento de reta de comprimento x e dois arcos de circunferência de raio r e ângulo interno.

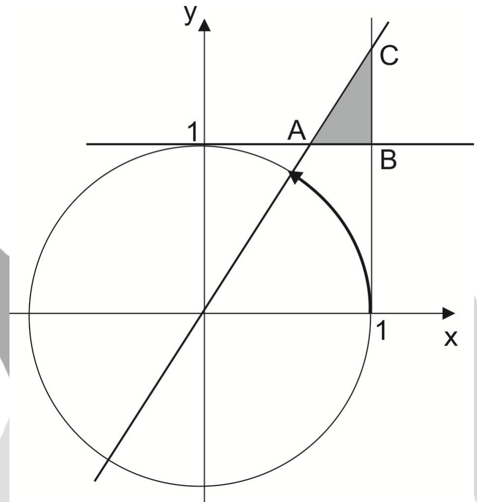


a) Se o engenheiro adotar $\alpha = 45^{\circ}$, o segmento central medirá $x = d\sqrt{2} - 2r(\sqrt{2} - 1)$. Nesse caso, supondo que $d = 72$ m, e $r = 36$ m, determine a distância y entre as extremidades dos trechos a serem interligados.
b) Supondo, agora, que $\alpha = 60^{\circ}$, $r = 36$ m e $d = 90$ m, determine o valor de x.

18. (UFPE) Um gato encontra-se no ponto médio de uma escada medindo 12 m e que forma um ângulo de 60º com a horizontal. Se a escada desliza até a horizontal e o gato permanece imóvel, qual o inteiro mais próximo da distância (em decímetros) percorrida pelo gato? Ignore o tamanho do gato.



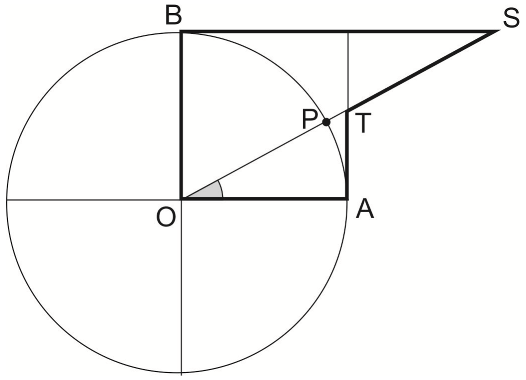
19. (UNIFESP) Com base na figura, que representa o círculo trigonométrico e os eixos da tangente e da cotangente, e sendo α o ângulo $B\hat{A}C$, determine



a) calcule a área do triângulo *ABC*, para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

b) Determine a área do triângulo *ABC*, em função de α, $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

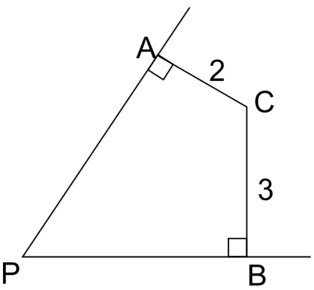
20. (UFRJ/93) A figura mostra uma circunferência de 1 m de raio e centro O, à qual pertencem os pontos A, B e P, sendo $\overline{AO}$ perpendicular a $\overline{BO}$; $\overline{BS}$ e $\overline{AT}$ são retas tangentes a essa circunferência.



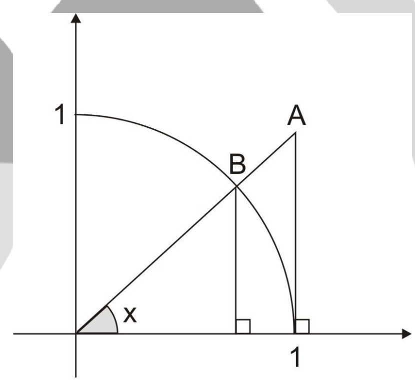
Determine o perímetro do polígono *AOBSTA* em função do ângulo θ.

21. (Olimpíada Paulista/05) Seja $ABCD$ um retângulo. Considere os pontos E e F sobre a diagonal AC tais que $AE = AB$ e $AF = AD$. Sejam G e H as projeções ortogonais de E e F sobre o lado AB, respectivamente
a) Sendo $B\hat{A}C = \alpha$, prove que $AG = AC \cdot \cos^2 \alpha$
b) Prove que $AG + FH = AC$

22. (Desafio - Canadá) Um ponto C é situada no interior de um ângulo de 60º, distando 2 unidades e 3 unidades às semi-retas. Determine a distância de P ao ponto C.



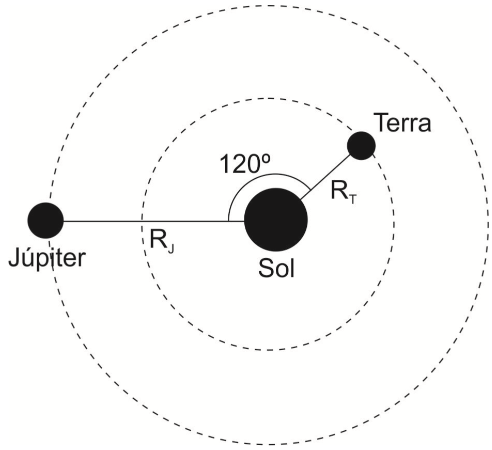
23. (UFPE) Seja x a medida em radianos de ângulo satisfazendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, como indicado na ilustração abaixo:



Considerando as áreas das diferentes regiões da figura, analise as afirmações seguintes:
(01) $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$
(02) $1 - \cos x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} < x^2$
(03) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$
(04) $1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$

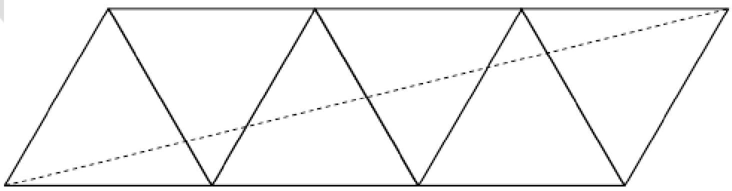
Lei dos Cossenos

24. (Unicamp/11) Quando o segmento de reta que liga Júpiter ao Sol faz um ângulo de 120º com o segmento de reta que liga a Terra ao Sol, a distância entre os dois planetas é de



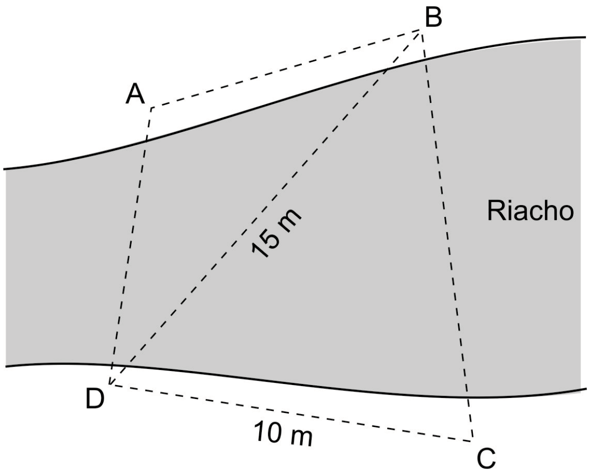
a) $\sqrt{R_J^2 + R_T^2 - R_J R_T \sqrt{3}}$
b) $\sqrt{R_J^2 + R_T^2 + R_J R_T \sqrt{3}}$
c) $\sqrt{R_J^2 + R_T^2 - R_J R_T}$
d) $\sqrt{R_J^2 + R_T^2 + R_J R_T}$

25. (UESPI) Na ilustração abaixo, temos um paralelogramo composto por seis triângulos equiláteros com lados medindo 1. Qual a medida da diagonal do paralelogramo, indicada na figura?



a) $\sqrt{13}$ b) 3,5 c) 4 d) $2\sqrt{3}$ e) 3,4

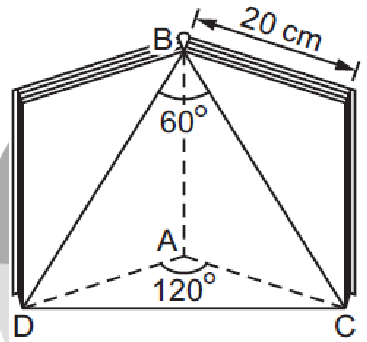
26. (Unicamp/12) Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito



Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

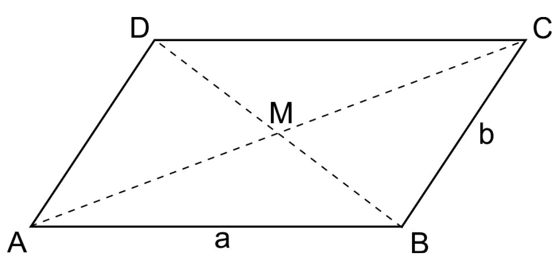
a) Calcule a distância entre A e B.
b) Calcule a distância entre B e D.

27. (Unicamp/08) Suponha que um livro de 20 cm de largura esteja aberto conforme a figura abaixo, sendo $D\hat{A}C = 120°$ e $D\hat{B}C = 60°$



a) Calcule a altura AB do livro.
b) Calcule o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.

28. (UERJ/02) Observe o paralelogramo ABCD.



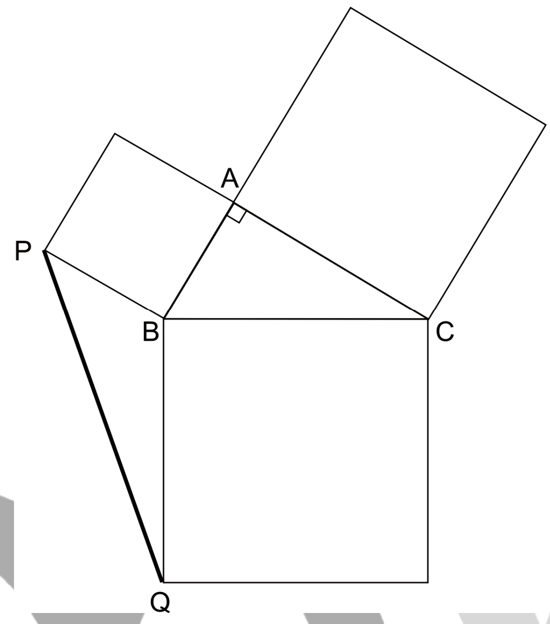
a) Calcule $AC^2 + BD^2$ em função de $AB = a$ e $BC = b$.
b) Determine a razão entre as áreas dos triângulos ABM e MBC.

29. Os lados de um triângulo estão na proporção 3 : 7 : 8. Mostre que seus ângulos estão em progressão aritmética.

30. (UFMT) Considere um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 9 cm. A área de um quadrado cujo lado é a mediana relativa ao maior lado do triângulo considerado é, em centímetros quadrados, aproximadamente:

a) 7,9 b) 8,0 c) 9,1 d) 10,2 e) 11,3

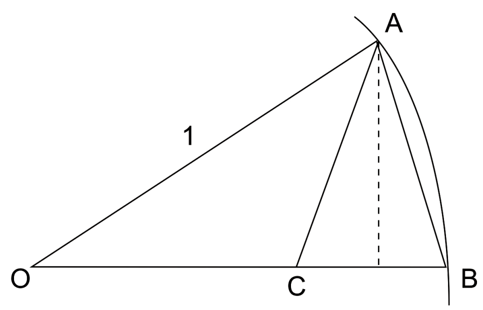
31. (Escs/09) Um painel, formado por três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo ABC de catetos AB e AC medindo 3 m e 4 m, respectivamente, necessita para sustentá-lo, de um cabo de aço retilíneo que liga os vértices P e Q como mostra a figura ao lado. O comprimento do cabo PQ vale:



a) $2\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{11}$ c) $\sqrt{46}$ d) $2\sqrt{13}$ e) $2\sqrt{15}$

32. Em um triângulo ABC, temos $AC = 7$ e $BC = 5$. São construídos dois quadrados $ACXY$ e $BCWZ$ externamente ao triângulo (ou seja, o triângulo não tem nenhum ponto interior que seja comum a um dos quadrados). Determine o valor numérico de $AB^2 + XW^2$

33. (Unicamp) Na figura, $AB = AC = \ell$ é o lado do decágono regular inscrito em um circunferência de raio 1 e centro O.

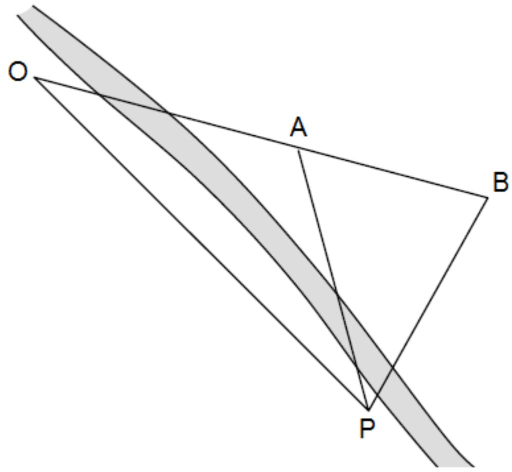


a) calcule o valor de ℓ

b) mostre que $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

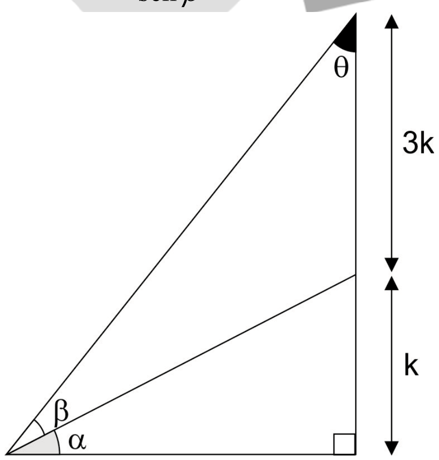
Lei dos Senos

34. (UFPE/10) Na ilustração abaixo, a casa situada no ponto *B* deve ser ligada com um cabo subterrâneo de energia elétrica, saindo do ponto *A*. Para calcular a distância *AB*, são medidos a distância e os ângulos a partir de dois pontos *O* e *P*, situados na margem oposta do rio, sendo *O*, *A* e *B* colineares. Se $O\hat{P}A = 30^o$, $P\hat{O}A = 30^o$, $A\hat{P}B = 45^o$ e $OP = (3+\sqrt{3})$ km, calcule *AB* em hectômetros.



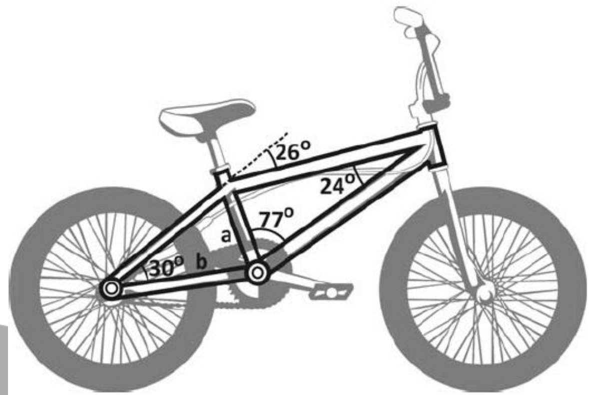
35. (Unicamp) Sejam *A*, *B* e *C* pontos de uma circunferência tais que $\overline{AB} = 2$ km, $\overline{BC} = 1$ km e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja de 135°.
a) Calcule o raio dessa circunferência.
b) Calcule a área do triângulo *ABC*.

36. Da figura abaixo, calcule o valor de $T = \dfrac{\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\beta}$

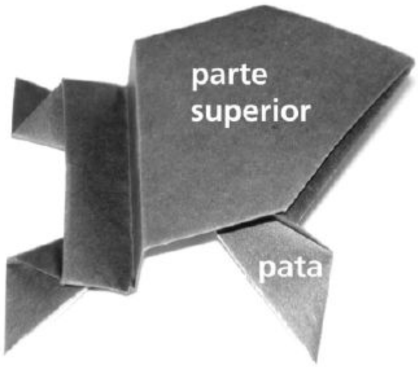


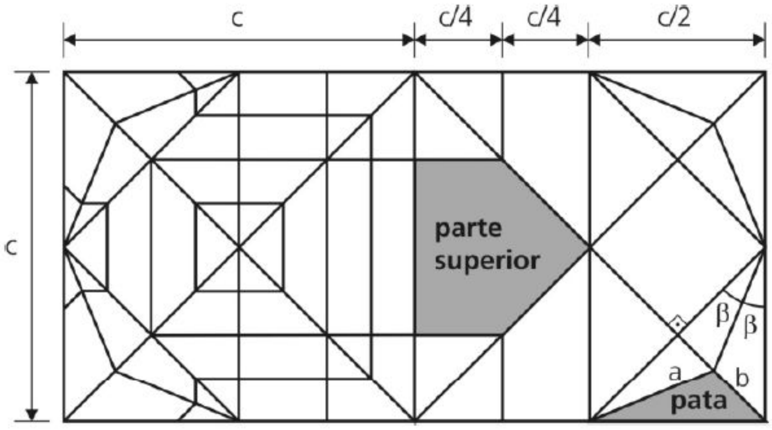
a) 3 b) 1/3 c) 2 d) 1/2 e) 1

37. (Unicamp/10) Laura decidiu usar sua bicicleta nova para subir uma rampa. As figuras abaixo ilustram a rampa que terá que ser vencida e a bicicleta de Laura.
a) Suponha que a rampa que Laura deve subir tenha ângulo de inclinação α, tal que $\cos\alpha = 0,99$. Suponha, também, que cada pedalada faça a bicicleta percorrer 3,15 m. Calcule a altura h (medida com relação ao ponto de partida) que será atingida por Laura após dar 100 pedaladas.
b) O quadro da bicicleta de Laura está destacado na figura abaixo. Com base nos dados da figura, e sabendo que a mede 22 cm, calcule o comprimento b da barra que liga o eixo da roda ao eixo dos pedais



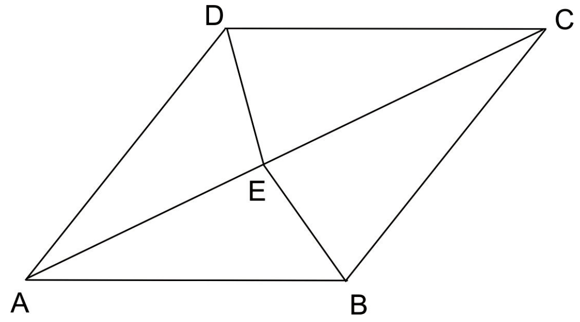
38. (Unicamp/09) A figura abaixo, à esquerda, mostra um sapo de *origami*, a arte japonesa das dobraduras de papel. A figura à direita mostra o diagrama usado para a confecção do sapo, na qual se utiliza um retângulo de papel com arestas iguais a **c** e **2c**. As linhas representam as dobras que devem ser feitas. As partes destacadas correspondem à parte superior e à pata direita do sapo, e são objeto das perguntas a seguir





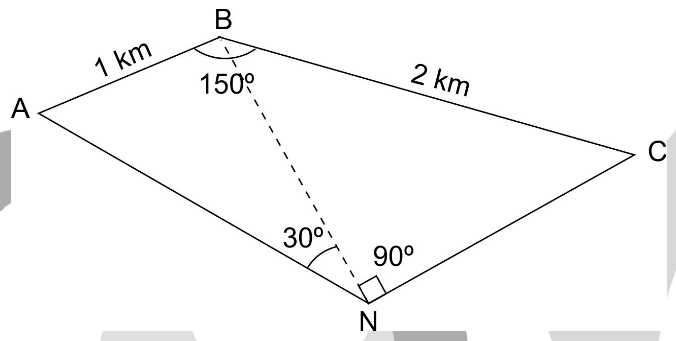
a) Quais devem ser as dimensões, em centímetros, do retângulo de papel usado para confeccionar um sapo cuja parte superior tem área igual a 12 cm^2?
b) Qual a razão entre os comprimentos das arestas a e b da pata direita do sapo?

39. Considere o losango $ABCD$ cuja diagonal maior é AC. Um ponto E pertence a essa diagonal. Se $B\hat{C}D = 60°$ e $CE = CD$, então qual a razão da área do quadrilátero $ABED$ pela área do quadrilátero $BCDE$?



a) $\sqrt{3}-1$ b) $2/3$ c) $\sqrt{2}/2$ d) $3/4$ e) $\sqrt{3}/2$

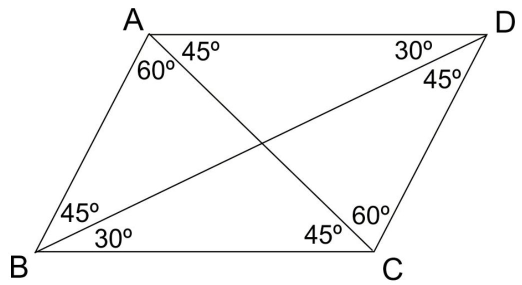
40. (Unicamp/05) Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.
b) Calcule o comprimento do segmento $\overline{NB}$.

41. (Unicamp/92) Calcule a área de um triângulo em função de um lado ℓ e dos dois ângulos α e β a ele adjacentes.

42. Justifique por que a situação representada abaixo, em que ABCD é um paralelogramo é impossível.

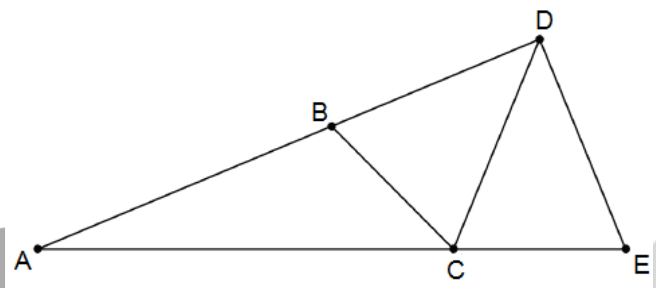


43. (Unicamp/00) Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.
a) Quais são esses números?
b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.
c) Sendo α e β os outros dois ângulos do referido triângulo, com $\beta > \alpha$, mostre que $\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha < \frac{1}{4}$.

44. (IBMEC/07) Na figura, tem-se que:

- os segmentos $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ são congruentes e cada um mede 4 cm;
- o ângulo $C\hat{D}E$ mede o dobro da medida do ângulo $B\hat{A}C$.
- o ponto C pertence à bissetriz do ângulo $B\hat{D}E$

a) Calcule a medida do segmento $\overline{CE}$.
b) Calcule a medida do segmento $\overline{AC}$.
Dica: se precisar, utilize a seguinte fórmula $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

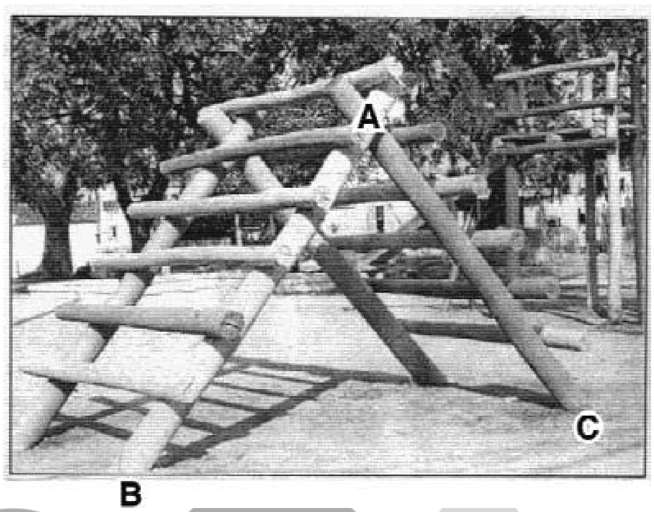


45. Em um hexágono regular ABCDEF, a bissetriz do ângulo $A\hat{F}B$ intercepta AB no ponto G, e H é um ponto da bissetriz do ângulo $B\hat{F}E$ tal que $FH = FG$. Determine a razão da área do triângulo FGH para a área do hexágono.

46. Os lados de um triângulo são números inteiros e consecutivos. Se o maior ângulo é o dobro do menor, determine:
a) as medidas dos lados
b) o valor do cosseno do maior ângulo
c) o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

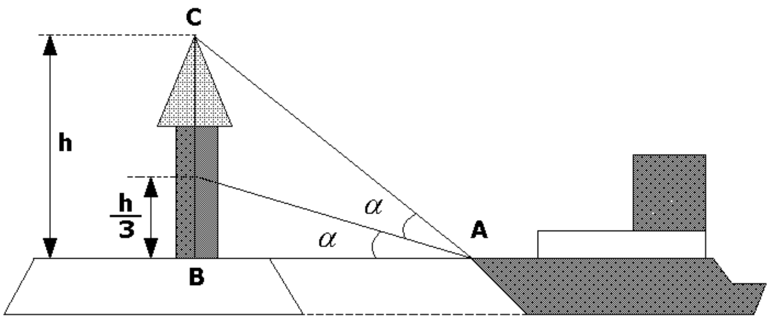
Fórmulas de Transformação

47. (UFPel - adaptada) São cada vez mais freqüentes construções de praças cujos brinquedos são montados com materiais rústicos. A criatividade na montagem de balanços, escorregadores e gangorras de madeira vem proporcionando uma opção de lazer para as crianças.



A figura acima mostra um brinquedo simples que proporciona à criançada excelente atividade física. Considerando os textos, a distância AB e AC igual a 2,0 m, o ângulo $B\hat{A}C$ igual a 75º e seus conhecimentos, determine a distância de B até C.

48. (Epcar) O comandante de um navio situado num ponto A avista o topo C de uma torre de altura h segundo um ângulo 2α com a horizontal e avista também uma janela da torre segundo um ângulo α com a horizontal como mostra a figura.



Sabe-se que essa janela está situada a h/3 do solo e a distância BA é de 20 m. Nessas condições:

a) $h \in [50, +\infty[$

b) $h \in [0, 40[$

c) $h \in \mathbb{N}$

d) não é possível calcular h

49. (FGV) Conhecidas as relações trigonométricas

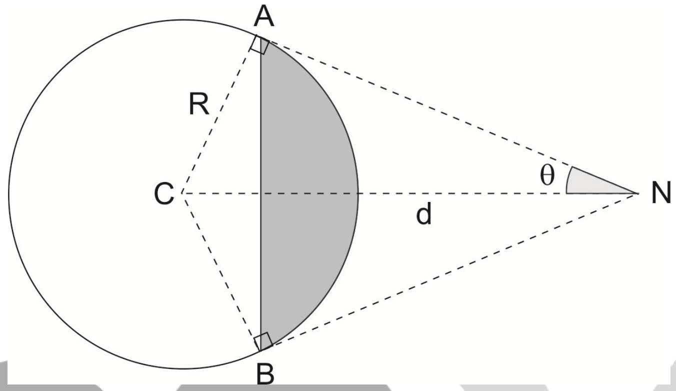
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \text{ e}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

a) obtenha, justificando, a expressão de $\cos 2x$ em função de $\cos x$;
b) obtenha, justificando, a expressão de $\operatorname{tg}(a+b)$ em função de $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} b$

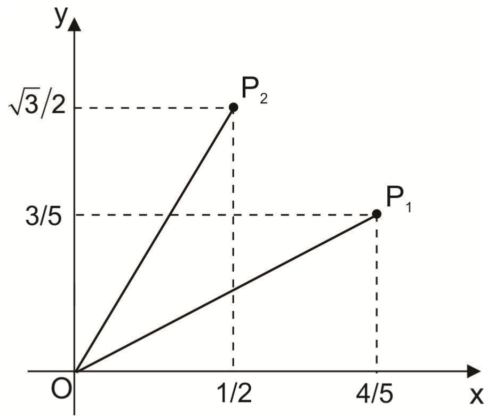
50. (UFSCAR/10) Suponha que o planeta Terra seja uma esfera de centro C e raio R. Na figura, está representado o planeta Terra e uma nave espacial N. A fração visível da superfície da Terra por um astronauta na nave N é dada em função do ângulo θ, mostrado na figura, pela expressão:

$$f(\theta) = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{2}$$



a) Determine o ângulo θ, em graus, para o qual é visível da nave a quarta parte da superfície da Terra e a distância da nave à superfície da Terra neste caso. (Use a aproximação $R = 6.400$ km.)
b) Se um astronauta numa nave, a uma distância d da Terra, avista a superfície da Terra com ângulo $\theta = 15^\circ$, determine a fração visível da superfície da Terra pelo astronauta. (Use as aproximações $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{6} = 2,4$)

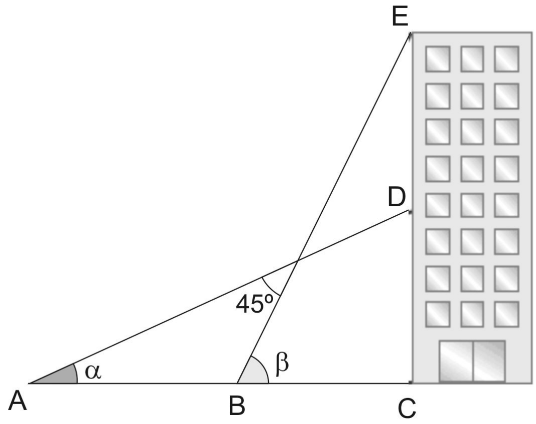
51. (Espcex/07) Na figura a seguir são fornecidas as coordenadas cartesianas dos pontos P_1 e P_2. Denomina-se θ o ângulo $P_1\hat{O}P_2$.



Com base nessas informações pode-se afirmar que o valor de $\cos\theta$ é:

a) $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$ b) $\dfrac{13}{10}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$ d) $\dfrac{3}{10}$ e) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

52. (UERJ) Para combater um incêndio, os bombeiros utilizaram duas escadas AD e BE, que formavam entre si um ângulo de 45º, conforme mostra a figura abaixo.

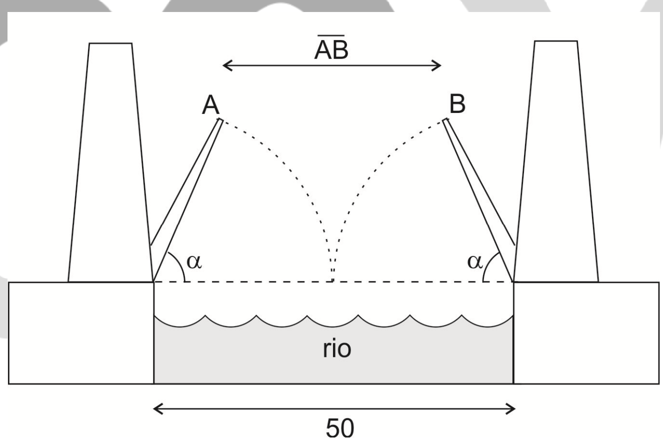


Considere $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{7}{17}$ e as distâncias $AC = 17$ m e $BC = 5$ m. Determine:

a) o comprimento *CD*.

b) a altura *CE* do prédio.

53. (Unicamp/08) Uma ponte levadiça, com 50 metros de comprimento, estende-se sobre um rio. Para dar passagem a algumas embarcações, pode-se abrir a ponte a partir de seu centro, criando um vão AB, conforme a figura abaixo.



Considerando que os pontos *A* e *B* têm altura iguais, não importando a posição da ponte, responda às questões abaixo.

a) Se o tempo gasto para girar a ponte em 1 equivale a 30 segundos, qual será o tempo necessário para elevar os pontos A e B a uma altura de 12,5 m, com relação à posição destes quando a ponte está abaixada?

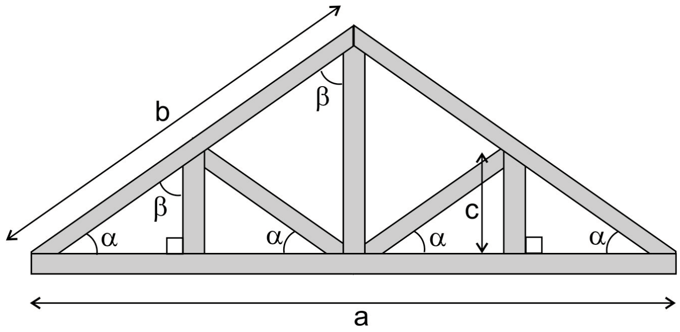
b) Se $\alpha = 75°$, quando mede $\overline{AB}$?

54. (Unicamp/07) Na execução da cobertura de uma casa, optou-se pela construção de uma estrutura, composta por barras de madeira, com o formato indicado na figura ao lado.

Resolva as questões abaixo supondo que $\alpha = 15°$. **Despreze a espessura das barras** de madeira e não use aproximações nos seus cálculos.

a) Calcule os comprimentos b e c em função de a, que corresponde ao comprimento da barra da base da estrutura.

b) Assumindo, agora, que $a = 10$ m, determine o comprimento total da madeira necessária para construir a estrutura.



55. (UFMS/07) Uma luminária cônica circular, de abertura angular de θ graus, posicionada a 3 metros do chão, com o segmento AO perpendicular ao segmento AB, projeta uma elipse de luz no chão de eixo maior com 1m de comprimento, como ilustrado na figura 1. Se deslocarmos em θ graus a luminária, como ilustrado na figura 2, qual será o comprimento do eixo maior, em centímetros, da nova elipse de luz no chão?
(Considere θ = ângulo formado entre os segmentos BO e CO, como nas figuras)

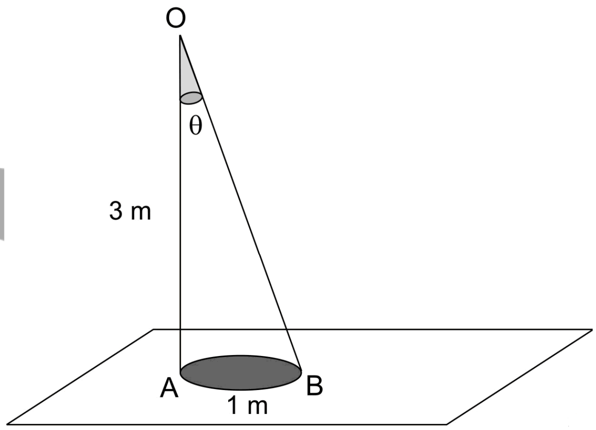


Figura 1

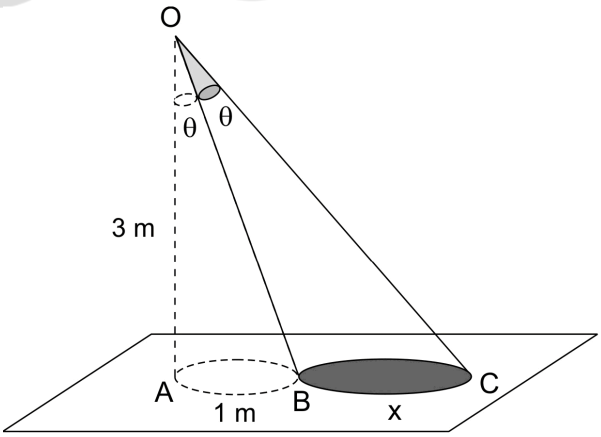
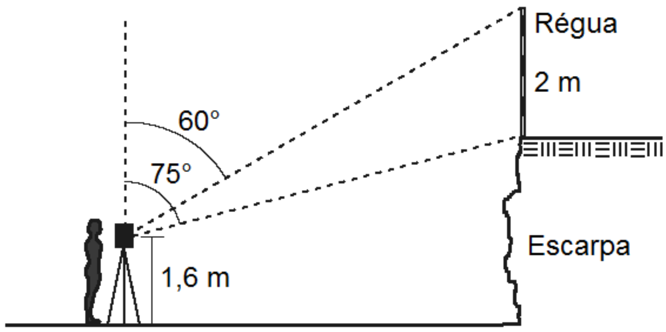


Figura 2

56. (Unicamp/06) De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60º, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75º. Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6m do nível da base da escarpa, responda às questões abaixo.



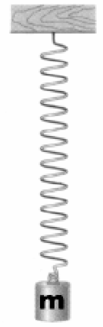
a) Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?
b) Qual a altura da escarpa?

57. (Ibmec/08) Considere a expressão $y = \cos(2^x)$ em que $x \in \mathbb{R}$, para responder o que se pede a seguir.
a) Determine o menor valor real de x para o qual $\cos(2^x) = 1$
Dados: $\log 2 = 0,30$ e $\log \pi = 0,50$
b) Sabendo que $\cos(2^x) = \frac{3}{4}$, calcule $\cos(2^{x+1})$.

58. São dados dois ângulos agudos α e β. Prove que se $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, então $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

59. (Unicamp/97) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 metro e um dos ângulos agudos é o triplo do outro.
a) Calcule os comprimentos dos catetos.
b) Mostre que o comprimento do cateto maior está entre 92 e 93 centímetros.

60. (UERJ/03) Considere um bloco de massa m, suspenso por uma mola vertical, como mostra a figura



O bloco é puxado para baixo e solto, no instante $t = 0$, dando origem a um movimento harmônico simples,
ignorando a resistência do ar, a força de atrito interna da mola e supondo a situação ideal, este movimento é regido pela seguinte equação:

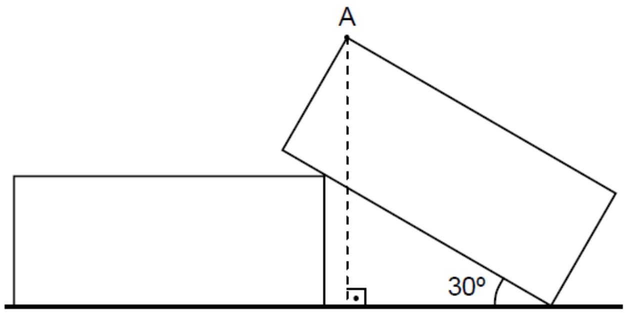
$$y(t) = A\cos\alpha t + B\,\text{sen}\,\alpha t$$

Nesta equação, t representa o tempo, y a posição do bloco no instante t e α é uma constante que depende do bloco e da mola.
Observe, a seguir, outra forma de representação para a equação acima.

$$y(t) = R\,\cos(\alpha t - \beta)$$

Nestas duas equações, R, α e β são constantes, sendo α e β dados em radianos. Em função de A e B, determine o valor de R e o valor de β.

61. (UFPE/11) Na ilustração abaixo, temos dois retângulos congruentes com base medindo 12 cm, e altura 5 cm. Qual o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto A até a horizontal? Dado: use a aproximação $\sqrt{3} = 1{,}73$.



62. (Unicamp) Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo.
a) Mostre que as tangentes desses três ângulos não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.
b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam números inteiros positivos, calcule essas tangentes.

63. Considere o triângulo ABC abaixo, onde os ângulos A, B e C estão em progressão aritmética crescente.

Determine os valores de cada um desses ângulos, respectivamente, nas seguintes condições:

a) $\text{sen}\,A + \text{sen}\,B + \text{sen}\,C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

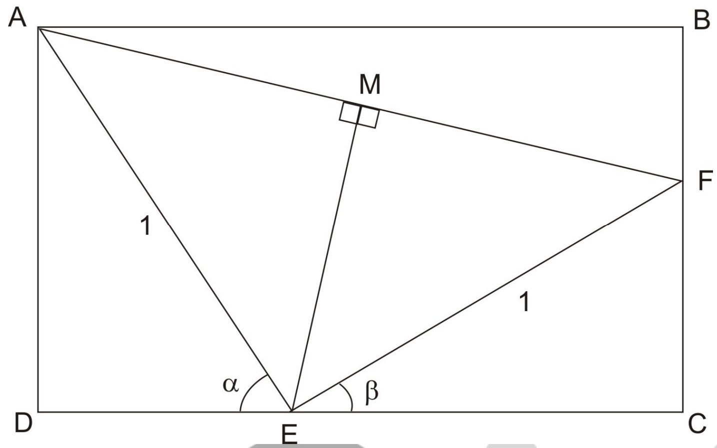
b) $AB = 2BC$

64. (Unicamp/06) Um triângulo retângulo de vértices A, B e C é tal que $AC = 6$ cm, $AB = 8$ cm e $BC = 10$ cm. Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ também são lados de quadrados construídos externamente ao triângulo ABC. Seja O o centro da circunferência que circunscreve o triângulo e sejam D, E e F os centros dos quadrados com lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

a) Calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{DO}$, $\overline{EO}$ e $\overline{FO}$.

b) Calcule os comprimentos dos lados do triângulo de vértices D, E e F.

65. (Paulista) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo.



a) Calcule as medidas dos ângulos $A\hat{F}E$ e $B\hat{A}F$, em função de α e β.

b) Mostre que $CD = \cos\alpha + \cos\beta$

c) Prove que $AF = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

d) A partir dos itens anteriores, demonstre uma das fórmulas de Prostaférese:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Equações Trigonométricas

66. (Unicamp/87) Ache os valores de *x*, com $0^{\circ} \leq x < 360^{\circ}$, tais que $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x - 4 \geq 0$

67. (FGV/07) A soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}(-x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) $\frac{7\pi}{2}$ b) $\frac{9\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 3π e) $\frac{3\pi}{2}$

68. (Unicamp/01) Considere a equação trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta = 0$.

a) Mostre que não são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$.
b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação.

69. (Unicamp/99) Considere a função

$$S(x) = 1 + 2\operatorname{sen}x + 4(\operatorname{sen}x)^2 + 8(\operatorname{sen}x)^3,$$

para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Resolva a equação: $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

70. (Unicamp/96) Ache todos os valores de *x*, no intervalo $[0, 2\pi]$, para os quais

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

71. (UFPE/10) Quantas soluções a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos x}$ admite, no intervalo [0, 80π)?

72. (UFF/00) Dados os ângulos α e β tais que $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resolva a equação $\operatorname{sen}(x - \alpha) = \operatorname{sen}(x - \beta)$, para $x \in [0, 2\pi]$.

73. (China/04) Seja θ um ângulo agudo tal que a equação $x^2 + 4x\cos\theta + \operatorname{cotg}\theta = 0$ na variável x tem raiz dupla. Então a medida de θ em radianos é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{12}$ ou $\frac{5\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{12}$

74. (MACK/00) Assinale a alternativa na qual os valores de θ fazem com que a equação

$$x^2 + 2x + 2\cos\theta = 0,$$

em x, não possua raízes reais.

a) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ c) $\pi < \theta < \frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$

75. Quantas soluções a equação

$$\cos(15\theta) = \cos(3\theta)$$

tem no intervalo $0^\circ \le x \le 180^\circ$?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

76. (UFC/01) Supondo $0 \le \theta \le \pi$, encontre todos os valores de θ para os quais $\cos 3\theta + \cos 5\theta = \cos 4\theta$.

77. (Unicamp/95) Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} \text{sen}(x+y) = 0 \\ \text{sen}(x-y) = 0 \end{cases}$$

que satisfaçam $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le \pi$.

78. (Unicamp/03) Considere dois triângulos retângulos T_1 e T_2 , cada um deles com sua hipotenusa medindo 1 cm. Seja α a medida de um dos ângulos agudos de T_1 e 2α a medida de um dos ângulos agudos de T_2 .

a) Calcule a área de T_2 para $\alpha = 22{,}5^\circ$.

b) Para que valores de α a área de T_1 é menor que a área de T_2 ?

79. (Unicamp/94)

a) Utilize a fórmula $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos para deduzir as seguintes fórmulas do arco metade:

$$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

b) Especifique os intervalos de variação de α nos quais se deve usar o sinal "mais" e nos quais se deve usar o sinal "menos" em cada uma das fórmulas acima.

80. (Unicamp/98)

a) Encontre todos os valores reais de x para os quais $-1 \le \frac{x^2+4}{4x} \le 1$.

b) Encontre todos os valores reais de x e y satisfazendo $x^2 + 4x\cos y + 4 = 0$.

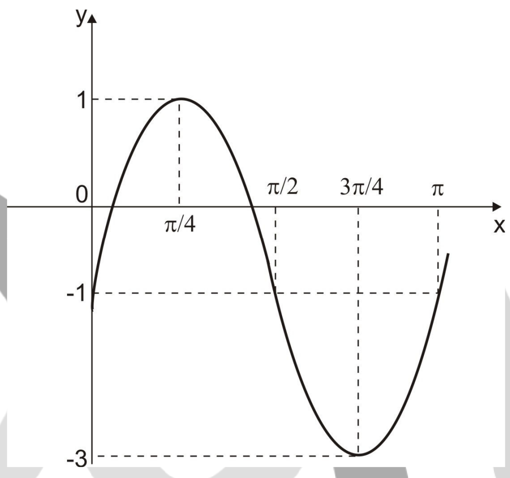
Funções Trigonométricas

81. (UERJ/06) O preço dos produtos agrícolas oscila de acordo com a safra de cada um: mais baixo no período da colheita, mais alto na entressafra. Suponha que o preço aproximado P, em reais, do quilograma de tomates seja dado pela função

$$P(t) = 0,8 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{360}(t-101)\right] + 2,7\,,$$

na qual t é o número de dias contados de 1º de janeiro até 31 de dezembro de um determinado ano.
Para esse período de tempo, calcule:
a) o maior e o menor preço do quilograma de tomates;
b) os valores de t para os quais o preço P seja igual a R$ 3,10

82. (UEPG/08) A respeito do gráfico abaixo, que representa uma função periódica do tipo $f(x) = a + b\cdot\text{sen}(cx)$, definida em R, assinale o que for correto.



(01) $f(x) = -1 + 2\,\text{sen}(2x)$
(02) A imagem de f é [–3, 1]
(04) O período da função é $\dfrac{\pi}{2}$
(08) $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 0$

83. (FGV Economia/10)
a) Construa o gráfico das funções $f(x) = 2 + \text{sen}\,x$ e $g(x) = 2 + \cos 2x$, para $0 \le x \le 2\pi$.
b) Admita que $f(x)$ e $g(x)$ indiquem as cotações das ações das empresas F e G na bolsa de valores de São Paulo no intervalo de horas $0 \le x \le 2\pi$ ($x = 0$ indica 12h00 e $x = 2\pi \approx 6,28$ indica, aproximadamente, 18h17).
Determine algebricamente (equações e/ou inequações) o intervalo de horas, com $0 \le x \le 2\pi$, em que a cotação das ações da empresa F foi maior ou igual à cotação das ações da empresa G.

84. (Ibmec/08) Um edifício tem a forma de um cilindro circular reto. Há uma escada, na forma de espiral,
que envolve o edifício desde o chão até a cobertura. Uma pessoa que sobe essa escada tem seu movimento no espaço tridimensional descrito pelas coordenadas a seguir:

$$x = 20\cos\left(\frac{\pi}{30}t\right),\ y = 20\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{30}t\right) \text{ e } z = 0{,}1t$$

em que t é o número de degraus que a pessoa já subiu, sendo $t = 0$ o nível do chão. Sabendo que cada volta completa em torno do prédio por meio dessa escada equivale a subir um andar e que o prédio tem 20 andares, uma pessoa que sobe do chão à cobertura inicia na altura $z = 0$ e termina na altura

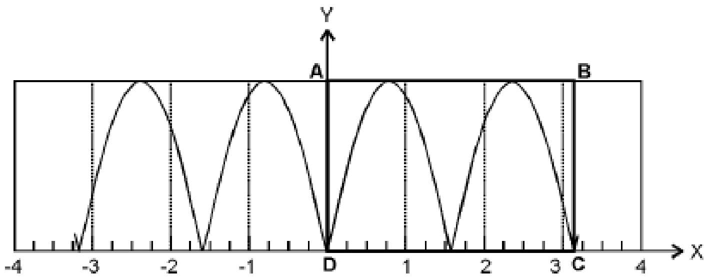
a) $z = 120$ b) $z = 240$ c) $z = 600$ d) $z = 1200$ e) $z = 2400$

85. (UERJ/94) Considere a função real, de variável real x, definida por $f(x) = \sqrt{1-\text{sen}^2 x} + \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$. Utilizando esses dados, responda aos itens a) e b).

a) Calcule $f(x)$.

b) Esboce o gráfico cartesiano de f.

86. (UERJ/99) Observe o gráfico da função f, que possui uma imagem $f(x) = |2\,\text{sen}(2x)|$ para cada x real.



a) Sendo o ponto de interseção do gráfico com o eixo x, a origem e $\overline{AB}$ tangente ao gráfico de f, calcule a área do retângulo $ABCD$.

b) Mostre graficamente que a equação $|2\,\text{sen}(2x)| = x^2$ tem três soluções. Justifique a sua resposta.

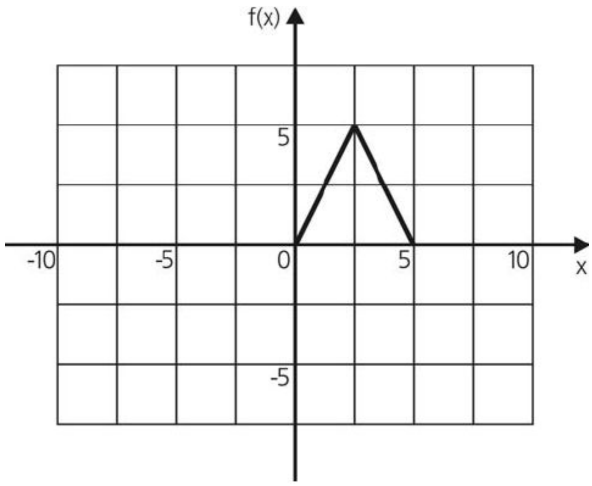
87. (UFRGS/02) Analisando os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{-x}$ e $g(x) = \text{sen}\,2x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, podemos afirmar que a equação $2^{-x} = \text{sen}\,2x$, para $x \in [0, 12\pi]$, possui:

a) 2 raízes b) 4 raízes c) 6 raízes d) 12 raízes e) 24 raízes

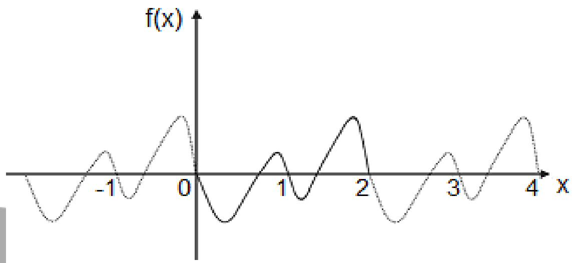
88. Suponha que $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$) e periódica, com período 10 (isto é, $f(x) = f(x+10)$). O gráfico da função no intervalo $[0,5]$ é apresentado abaixo.

a) Complete o gráfico, mostrando a função no intervalo $[-10,10]$, e calcule o valor de $f(99)$.

b) Dadas as funções $g(y) = y^2 - 4y$ e $h(x) = g(f(x))$, calcule $h(3)$ e determine a expressão de $h(x)$ para $2{,}5 \le x \le 5$.



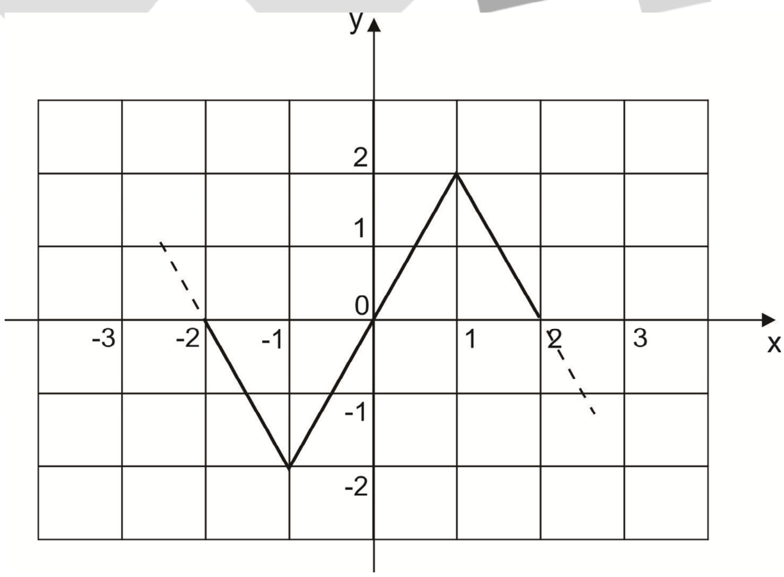
89. (FGV/09) A figura abaixo representa parte do gráfico de uma função periódica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



O período da função $g(x)=f(3x+1)$ é:

a) 1/3 b) 2/3 c) 2 d) 3 e) 6

90. A função $f(x)$ tem período 4. O gráfico de um período de $y=f(x)$ é mostrado no diagrama. Faça o gráfico de $y=1+\frac{1}{2}f(x-1)$, para $-2\le x\le 2$.



91. (Olimpíada Paulista/02) Mostraremos neste problema uma modelagem matemática que permite prever a performance das equipes da NFL (Liga Profissional de Futebol Americano) ou da NBA (Liga Profissional de Basquete), temporada a temporada.
Para isto iremos supor que o desempenho de uma equipe ao longo de uma temporada (campeonato) depende essencialmente apenas de seu conjunto de jogadores.
Assim, para tornar o campeonato mais "interessante", no início de cada temporada, os melhores jogadores iniciantes vão para as equipes que tiveram pior desempenho no campeonato anterior (este processo, descrito aqui de maneira simplificada, é chamado "draft").
Seja $U(t)$ a porcentagem de vitórias de um time durante a temporada do ano t (não há empates). Com o draft, analisando os dados da NFL, observamos que a razão na qual U varia no presente é, aproximadamente, proporcional à diferença entre 0,5 e o valor de U de anos (temporadas) atrás.
É possível, então, demonstrar que

$$U(t) = 0,5 + U_a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}(t - t_0)\right)$$

para certas constantes $U_a \in \mathbb{Q}$ e $t_0 \in \mathbb{N}$ que variam de equipe para equipe.
a) Para o Buffalo Bills, time da NFL, temos $U_a = -0,375$ e $t_0 = 1983$. Sabendo que cada equipe da NFL joga 16 partidas por temporada, quantas vitórias eram previstas para o Bills em 2001? (Só como curiosidade: o Bills teve 3 vitórias em 2001)
b) Considere duas equipes quaisquer A e B da NFL. Mostre que o modelo prevê que, em um determinado ano, a equipe A terá pelo menos tantas vitórias quanto a equipe B.

GABARITO

01. B

02. A

03. A

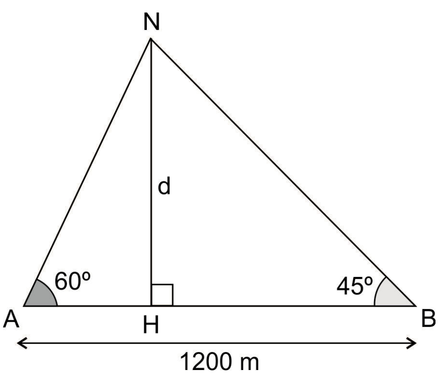
04. C

05. A

06. a) $h \approx 6\,\text{m}$

b) $h = 33\,\text{m}$

07. a)



b) $d = 600 \cdot (3 - \sqrt{3})$ m

08. 120 m

09. 270º

10. 13 horas e 24 minutos

11. $x = \dfrac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

12. a) $AF = \dfrac{15}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ b) $BF = 15\sqrt{2}$

13. 99 m

14. B

15. A

16. a) 100 cm

b) $\alpha = 30º$

17. a) $y = 72\sqrt{2}$ m

b) $x = 36\sqrt{3}$ m

18. 62,8 decímetros

19. a) $S = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

b) $S = \dfrac{(1-\text{cotg}\,\alpha)\cdot(\text{tg}\,\alpha - 1)}{2}$

20. $2 + \text{cotg}\,\theta + \text{tg}\,\theta + \text{cossec}\,\theta - \sec\theta$

21. a) Demonstração

b) Demonstração

22. $PC = \sqrt{\dfrac{76}{3}}$

23. (01) V (02) V (03) V

(04) V

24. D

25. A

26. a) $AB = 5\sqrt{3}$

b) $BD = 5\sqrt{7}$

27. a) $AB = 20\sqrt{2}$ cm

b) $V = \dfrac{2000\sqrt{6}}{3}$ cm^3

28. a) $2a + 2b$

b) 1

29. Demonstração

30. D

31. D

32. $AB^2 + XW^2 = 148$

33. a) $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) Demonstração

34. 20

35. a) $R = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{2}}{2}}$ km

b) $S = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ km^2

36. B

37. a) $h = 31{,}5\,\text{m}$

b) $b = 11(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm

38. a) 8 cm e 16 cm

b) $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

39. A

40. a) $R = 1\,\text{km}$

b) $NB = \sqrt{2}$ km

41. $S = \dfrac{\ell^2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta}{2\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)}$

42. Demonstração

43. a) 3, 5 e 7

b) 120º

c) Demonstração

44. a) $CE = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) $AC = 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$

45. 1/4

46. a) 4, 5 e 6

b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) $R = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

47. $d = \sqrt{8-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$ m

48. B

49. a) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

b) $\text{tg}(a+b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

50. a) $\theta = 30^\circ$ e $d = 6400\,\text{km}$

b) $\dfrac{3}{8}$

51. C

52. a) 7

b) 12

53. a) 900 s ou 15 min

b) $x = \dfrac{25\cdot(4-\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$ m

54. a) $b = \dfrac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$ e $c = \dfrac{a(2-\sqrt{3})}{4}$

b) $C_{total} = 5(6+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ m

55. $x = \dfrac{5}{4}$

56. a) $d = 2\sqrt{3}+3$ m

b) $h = 1{,}6+\sqrt{3}$ m

57. a) $x = \dfrac{8}{3}$

b) $\cos(2^{x+1}) = \dfrac{1}{8}$

58. Demonstração

59. a) $a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e $b = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) Demonstração

60. $R = \sqrt{A^2+B^2}$ e $\beta = \text{arctg}\dfrac{B}{A}$

61. 10

62. a) Demonstração

b) 1, 2 e 3

63. a) $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 90^\circ$

b) $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 90^\circ$

64. a) $DO = 5$, $EO = 7$ e $FO = 7$

b) $FE = 7\sqrt{2}$, $FD = \sqrt{130}$ e $ED = 2\sqrt{29}$

65. a) $A\hat{F}E = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ e $B\hat{A}F = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$

b) Demonstração

c) Demonstração

d) Demonstração

66. $30^\circ \le x \le 150^\circ$

67. B

68. a) Demonstração

b) $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

69. a) $S\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 4+4\sqrt{3}$

b) $\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

70. $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

71. 80

72. $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

73. B

74. E

75. C

76. $S = \left\{\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{7\pi}{8}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

77. $S = \{(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi), (\pi/2,\pi/2)\}$

78. a) $S(T_2) = \dfrac{1}{4}$ cm^2

b) $0^\circ < \alpha < 30^\circ$

79. a) Demonstração

b) Para $\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}$:

- Sinal Positivo:
  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid k \cdot 4\pi < \alpha < 2\pi + k \cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Sinal Negativo:
  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 2\pi + k \cdot 4\pi < \alpha < 4\pi + k \cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Para $\cos\dfrac{\alpha}{2}$:

- Sinal Positivo:
  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid -\pi + k \cdot 4\pi < \alpha < \pi + k \cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Sinal Negativo:
  $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \pi + k \cdot 4\pi < \alpha < 3\pi + k \cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

80. a) $x = 2$ e $x = -2$

b) $(x,y) = (2, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ ou

$(x,y) = (-2, 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

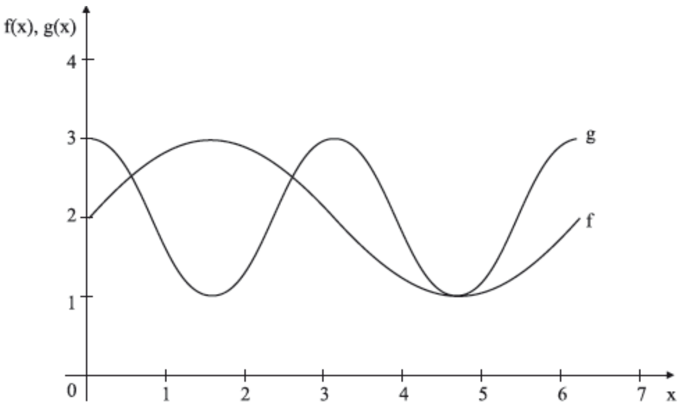
81. a) Maior preço: R$ 3,50

Menor preço: R$ 1,90

b) $t = 131$ ou $t = 251$

82. 11

83. Gab:

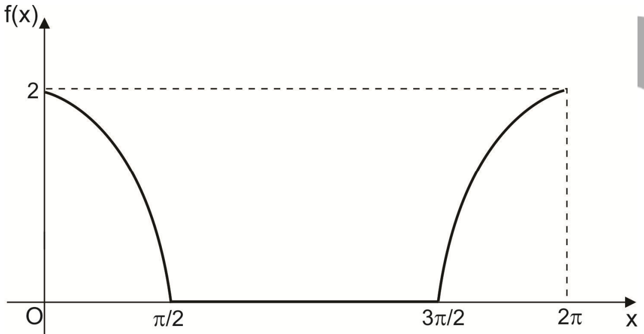


b) 12h31 às 14h37 e às 16h43

84. A

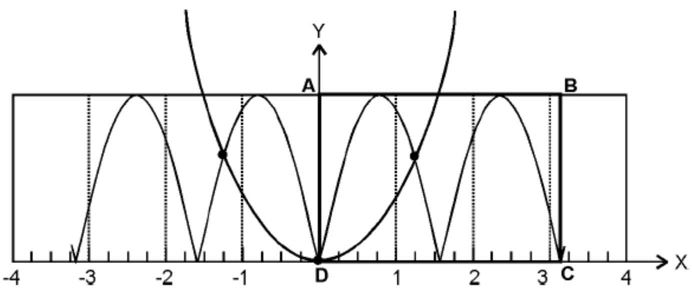
85. a) $f(x)=\begin{cases} 2\cos x, \text{ se } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \\ 0, \quad \text{se} \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

b)



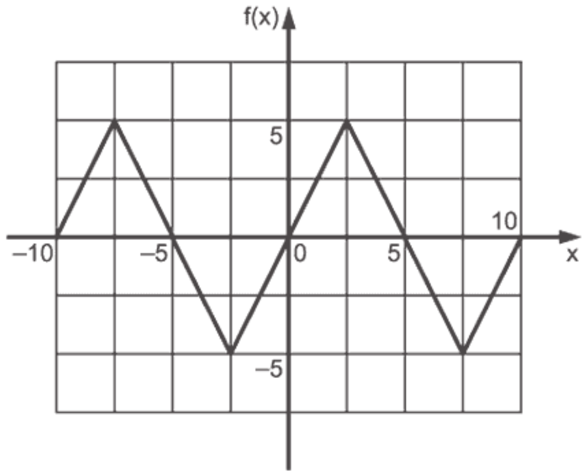
86. a) $S(ABCD)=2\pi$

b)



87. E

88. a)

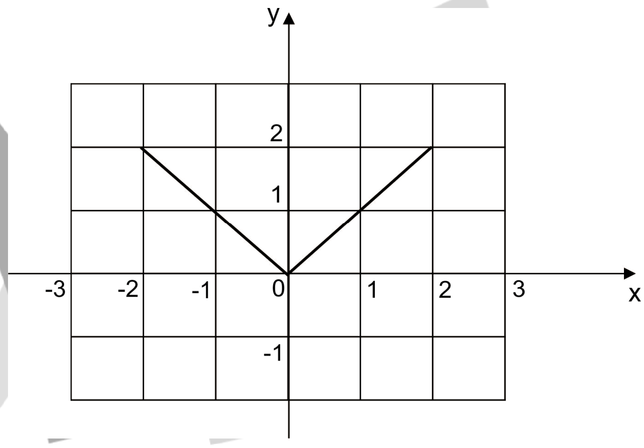


$f(99)=-2$

b) $h(x)=4x^2-32x+60$; $h(3)=0$

89. B

90.



91. a) 2

b) Demonstração