

1ª Lista de Matemática- Trigonometria- 2º Mecânica

Thiago Grando

10 de fevereiro de 2017

1. (ITA 1992) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y = mx$, $m > 0$, forma com o eixo dos x é:

R: $y = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}x$.

2. (ITA 1992) Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que $\cos(x) = \frac{5}{6}$ e $\cos(y) = \frac{4}{5}$. Sendo $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} + \operatorname{sen}^2(\alpha)}$, determine em qual quadrante α pertence e o valor de T .

R: α está no 4º quadrante e $T = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10}$

3. (ITA 1992) Seja $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. Determine o conjunto solução da desigualdade

$2^{\operatorname{sen} x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$ no intervalo $[0, 2\pi)$.

R: $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$

4. (ITA 1993) Num triângulo ABC que é retângulo em A , seja D a projeção de A sobre BC . Sabendo-se que o segmento BD mede ℓ cm e que o ângulo $D\hat{A}C$ mede θ graus, quanto vale a área do triângulo ABC ?

R: a área vale $\frac{\ell^2}{2} \sec^2(\theta) \operatorname{tg}(\theta)$ cm².

5. (ITA 1993) Determine o conjunto solução da equação $\operatorname{sen}(5x) = \cos(3x)$.

R: $S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. (ITA 1993) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e outro 2α . Qual a razão entre o lado menor e o lado maior do paralelogramo?

R: $\frac{1}{2 \cos(\alpha)}$.

7. (ITA 1994) Um triângulo ABC , retângulo em A , possui área S . Se $x = A\hat{B}C$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, quanto vale S ?

R: $S = r^2 \operatorname{sen}(2x)$.

8. (ITA 1994) Seja $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $x \neq \frac{\pi}{4}$. Mostre que

$$\frac{1}{(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))^2} - \frac{4 \operatorname{tg}(x)}{(1 - \operatorname{tg}^2(x))^2} = 1.$$

9. (ITA 1995) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, atinge a torre a uma altura h . Se o segundo, disparado sob um ângulo 2θ , atinge-a a uma altura H , qual a relação entre h e H ?

R: $H = \frac{2hd^2}{d^2 - h^2}$.

10. (ITA 1995) Sendo $0 < \theta < \pi$, mostre que $\frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
11. (ITA 1995) Considere C uma circunferência centrada em O e raio $2r$, e t a reta tangente a C num ponto T . Considere também A um ponto de C tal que $\widehat{AOT} = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, qual a área do trapézio $OABT$?
- R: $r^2(4\sin(\theta) - \sin(2\theta))$ u.a.
12. (ITA 1995) Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x}\sin(x) & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R} : f(y) = 0\}$. Qual o valor de a , sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

R: $a = \frac{\pi^2}{2}$

13. (ITA 1995) Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \sin\left(\frac{n! \pi}{6}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$. Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com A dá o próprio A ?
- a) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
b) $(-\infty, -2]$
c) $[-2, 2]$
d) $[-2, 0]$
e) $[0, 2]$
- R: c

14. (ITA 1996) Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tal que $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = m$. Mostre que

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\sin^3(\alpha) + \cos^3(\alpha)} = \frac{2(m^2 - 1)}{m(3 - m^2)}$$

15. (ITA 1996) Seja α um número real tal que $\alpha > 2(1 + \sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, quanto vale o terceiro ângulo interno desse triângulo?
- R: 135° .

16. (ITA 1996) Seja $a \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ um número real dado. A solução (x_0, y_0) do sistema de equações

$$\begin{cases} (\sin(a))x - (\cos(a))y = -\tan(a) \\ (\cos(a))x - (\sin(a))y = -1 \end{cases},$$

é tal que

a) $x_0.y_0 = \operatorname{tg}(a)$

b) $x_0.y_0 = \sec(a)$

c) $x_0.y_0 = 0$

d) $x_0.y_0 = \operatorname{sen}^2(a)$

e) $x_0.y_0 = \operatorname{sen}(a)$

R: c .

17. (ITA 1997) Em um triângulo ABC , sabe-se que o segmento $\overline{AC}$ mede 2cm . Sejam α e β , respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Quanto mede a área do triângulo (em cm^2)?

R: $2\operatorname{sen}^2(\alpha) \cdot \cotg(\beta) + \operatorname{sen}(2\alpha)$.

18. (ITA 1998) Quanto vale a soma das raízes da seguinte equação

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}(x) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) = 0, \text{ no intervalo } [0, 2\pi]?$$

R: $\frac{16\pi}{3}$.

19. (ITA 1998) Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, qual o valor de

$$\operatorname{tg}^{10}(x) - 5\operatorname{tg}^8(x)\sec^2(x) + 10\operatorname{tg}^6(x)\sec^4(x) - 10\operatorname{tg}^4(x)\sec^6(x) + 5\operatorname{tg}^2(x)\sec^8(x) - \sec^{10}(x)?$$

R: -1 .

20. (ITA 1998) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)$. Então:

a) f é ímpar e periódica de período π .

b) f é par e periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

c) f não é par nem ímpar e é de período π .

d) f não é par e é periódica de período $\frac{\pi}{4}$.

e) f não é ímpar e não é periódica.

R: c .

21. (ITA 1999) Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Mostre que

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - a\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\sqrt{2}\cotg^2(a)}{1 + \cotg^2(a)}.$$

22. (ITA 1999) Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é tal que $4\operatorname{tg}^4(x) = \frac{1}{\cos^4(x)} + 4$, mostre que

$$\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(4x) = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

23. (ITA 2000) Seja x em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Encontre o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

R: $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right]$.

24. (ITA 2000) Num triângulo retângulo ABC , o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede 5 cm . Sabendo que $\hat{A} = \arccos \frac{3}{5}$ e $\hat{C} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$, calcule a área do triângulo ABC .
- R: $\frac{25}{2} \text{ cm}^2$.
25. (ITA 2000) Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo de sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Quanto vale $\cos(x)$?
- R: $\frac{5}{13}$.
26. (ITA 2000) Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \sin(3x) - \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$. Sobre f podemos afirmar que:
- a) é uma função par.
 - b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π .
 - c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $\frac{4\pi}{3}$.
 - d) é uma função periódica de período fundamental 2π .
 - e) não é par, não é ímpar e não é periódica.
27. (ITA 2001) Considere as funções $f(x) = \frac{5 + 7^x}{4}$, $g(x) = \frac{5 - 7^x}{4}$ e $h(x) = \arctan(x)$. Se a é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \frac{\pi}{4}$, então quanto vale $f(a) - g(a)$?
- R: $\frac{7}{2}$.
28. (ITA 2001) Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\sin^2(2\beta) - 2 \cos(2\beta) = 0$, quanto vale $\sin(\alpha)$?
- R: $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$.
29. (ITA 2001) O número complexo $z = \frac{1 - \cos(a)}{\sin(a) \cdot \cos(a)} + i \frac{1 - 2 \cos(a) + 2 \sin(a)}{\sin(2a)}$, $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tem argumento $\frac{\pi}{4}$. Quanto vale a ?
- R: $\frac{\pi}{6}$.
30. (ITA 2002) Se x, y e z são ângulos internos de um triângulo ABC e $\sin(x) = \frac{\sin(y) + \sin(z)}{\cos(y) + \cos(z)}$, mostre que o triângulo ABC é retângulo.
31. (ITA 2002) O triângulo ABC , inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi} \text{ cm}$, cujo ângulo oposto é de 15° . Determine o comprimento da circunferência em cm .
- R: $20\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$.
32. (ITA 2002) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R} : \sin(y) < x\}$ e A é tal que $f(A) = \mathbb{R}$. Determine o conjunto A .
- R: $A = [t, \infty)$, $t > 1$.
33. (ITA 2003) Encontre os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real x ,

$$\arctan\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) + \arctan\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a,$$

admite solução.

R: $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

34. (ITA 2003) Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito a função

$$f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x),$$

temos que:

- a) f é não-crescente e ímpar.
- b) f não é par nem ímpar.
- c) f é sobrejetora.
- d) f é injetora.
- e) f é constante.

R: e.

35. (ITA 2003) Para todo $x \in \mathbb{R}$, determine o valor da expressão $[\cos(2x)]^2 [\sin(2x)]^2 \sin(x)$.

R: $2^{-4} [2 \sin(x) + \sin(7x) - \sin(9x)]$.

36. (ITA 2004) Prove que, se os ângulos internos α, β e γ de um triângulo satisfazem a equação $\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos α, β ou γ é igual a 60° .

37. (ITA 2004) Determine o conjunto de todos os valores α , $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação(em x), $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}(\alpha) = 0$ são todas reais.

R: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

38. (ITA 2004) Considerando as funções $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, determine o valor de $\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

R: $\frac{7}{25}$.

39. (ITA 2005) Obtenha todos os pares (x, y) , com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \sin(x-y) = \frac{1}{2} \\ \sin(x) + \cos(y) = 1 \end{cases}.$$

R: $S = \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$.

40. (ITA 2005) Determine o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\left(\frac{1+x}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1-x}{2}\right) \geq \frac{\pi}{6}.$$

41. (ITA 2005) Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a medida geométrica das medidas dos catetos. Qual o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo?

R: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

42. (ITA 2005) Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{\cos(x)}(4 \sin^2(x) - 1) - \log_{\cos(x)}(4 - \sec^2(x)) > 2.$$

R: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right).$

43. (ITA 2006) Determine o conjunto solução de $(\operatorname{tg}^2(x) - 1)(1 - \operatorname{cotg}^2(x)) = 4$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

R: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

44. (ITA 2006) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77} \sin\left(5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ e seja $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, \infty)$, quanto vale $m + n$?

R: $-\frac{2\pi}{15}.$

45. (ITA 2007) Determine a soma dos elementos de $A \cup B$, onde $A = \left\{x_k = \sin^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}$ e $B = \left\{y_k = \sin^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2\right\}.$

R: 2.

46. (ITA 2007) Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) \sec(x) \geq 0.$$

47. (ITA 2009) Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, determine $\sin(x)$.

R: $\frac{3 - \sqrt{6}}{6}.$

48. (ITA 2009) Mostre que $\frac{2 \left[\sin\left(x + \frac{11\pi}{2}\right) + \operatorname{cotg}^2(x) \right] \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = [\cos(x) - \sin^2(x)] \cdot \operatorname{cotg}(x).$

49. (ITA 2010) Considere a equação $(3 - 2 \cos^2(x)) \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 6 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$

a) Determine todas as soluções de x no intervalo $[0, \pi[.$

b) Determine $\operatorname{cotg}(x)$, onde x são as soluções que você encontrou em a).

50. (ITA 2010) Se os números reais α e β , com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$, determine o valor de α .

R: $\frac{2\pi}{3}.$

51. (ITA 2010) Verifique que a equação $\arctan(e^x + 2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, admite uma única solução, e esta é positiva.